EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

7e JAARGANG 1930/31, Nr. 5

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

lossing, de stellingen omtrent som en product der wortels; eenige eenvoudige voorbeelden van vergelijkingen van hoogeren graad, die opgelost kunnen worden als vierkantsvergelijkingen, en van vergelijkingen, waarin vierkantswortels optreden. Vergelijkingen met meer onbekenden (symmetrische vergelijkingen, éénе vergelijking van den tweeden graad te zamen met eene of meer van den eersten graad). Machten en wortels met rationale exponenten (rekenen met imaginaire getallen mag niet geeischt worden). Gewone logarithmen en hunne toepassing op het rekenen. Afleiding der formule voor samengestelde-intrestrekening en van de somformules voor reken- en meetkundige reeksen met eenvoudige toepassingen (daaronder eenige zeer eenvoudige toepassingen op annuïteiten). Alles op zoodanige wijze, dat het behandelde, zooveel de omstandigheden en de beschikbare tijd toelaten, op practische opgaven wordt toegepast. Ook moet, zoover de tijd het toelaat, de nadruk gelegd worden op eene nauwkeurige, duidelijke en beknopte behandeling der theorie.

III. *Gymnasium.*

Natuurwetenschappen.

A. Op de twee taalkundige lijnen.

Het onderwijs is voor deze lijnen gemeenschappelijk en omvat:

a. Astronomie. Eene elementaire uiteenzetting, die o.a. de voor het aardrijkskunde-onderwijs noodzakelijke grondslagen verschaft, van het uiterlijk en de schijnbare beweging van den sterrenhemel, schijnbare en werkelijke beweging van zon en maan, vorm en grootte der aarde en kaartprojecties, tijd- en plaatsbepalingen, alsmede de natuurkundige gesteldheid der hemellichamen.

b. Geologie. Kennis van de meest voorkomende en in practisch opzicht belangrijkste mineralen en bergsoorten; hoofdtrekken der dynamische geologie; overzicht over de ontwikkelingsgeschiedenis der aarde, vooral met het oog op de geologische ontwikkeling van Denemarken.

Waar de omstandigheden dit wenschelijk maken, zal den scholen worden toegestaan, in plaats van geologie een ander deel der natuurwetenschappen te kiezen, mits de keuze goedgekeurd wordt door den inspecteur van het onderwijs.

B. Op de wis- en natuurkundige lijn.

Het onderwijs is voor deze lijn afzonderlijk, en omvat:

a. Astronomie.

1. Eene elementaire uiteenzetting, die o.a. de voor het aardrijkskundeonderwijs noodzakelijke grondslagen verschaft, van het uiterlijk en de schijnbare beweging van den sterrenhemel, schijnbare en werkelijke beweging van zon en maan, vorm, grootte en kaarteering der aarde, tijd- en plaatsbepalingen, alsmede de natuurkundige gesteldheid der hemellichamen.

2. Als de leerlingen de noodzakelijke voorkennis hebben, wordt dieper op bovengenoemde leerstof ingegaan en wordt deze wiskundig behandeld.

b. Natuurkunde.

1. Warmteleer. Uitzetting. Warmtevoortplanting door geleiding. Soortelijke warmte. Smeltwarmte en verdampingswarmte. Dampdruk. Vochtigheidstoestand. Vloeibaarmaken van gassen. Mechanisch aequivalent der warmte. Van meteorologie wordt behandeld, wat noodig is voor het begrijpen van een weerkaart, en iets over het dagelijksche en jaarlijksche verloop van de temperatuur.

2. Licht. Terugkaatsing, vlakke spiegels, bolvormige spiegels. Breking, prisma's, lenzen. Gebruik der lenzen. Spectraalanalyse. Stralende warmte. Het oog. Lichtsnelheid. De gebruikelijkste methoden van lichtmeting.

3. Magnetisme en electriciteit. Magneten (krachtlijnen). Aardmagnetisme. Ten minste een der hoofdrichtingen van Gauss. Wrijvings- en aanrakingselectriciteit. Electrische energie. Galvanische stroomen (meting van stroomsterkte, weerstand en potentiaalverschil). Electrolyse. Galvanische elementen (accumulator). Electromagnetisme. Onderlinge werkingen van stroomen en magneten. Inductiestroomen. Electrische trillingen. Soorten van electrische stralen.

4. Mechanische Natuurkunde. Samenstelling en ontbinding van gerichte grootheden. Kracht, massa, snelheid en versnelling. Wrijvingsweerstand. Valbeweging. Beweging op het hellend vlak. Cirkelbeweging. Centrale beweging. Slinger. Weeginstrumenten. Algemeene aantrekking, zwaartekracht, getijden. Elasticiteit. Botsing. Potentieele en kinetische energie. Druk in vloeistoffen en gassen, diffusie. Golfbeweging, staande golven. Geluid (tonen, geluidssnelheid in verschillende middenstoffen).

Het onderwijs moet zoo veel mogelijk experimenteel gegeven

worden. Voor practische oefeningen moet ten minste een tijd besteed worden, die beantwoordt aan twee wekelijksche lesuren per jaar.

Wiskundige behandeling der stof worde slechts op gebieden toegepast, waar zij werkelijk kan worden doorgevoerd.

Belangrijke nieuwe ontdekkingen op het gebied der natuurkunde behooren gedurig in de leerstof te worden opgenomen.

c. Scheikunde.

1. Anorganische scheikunde. Met gebruikmaking van het scheikundig teekenschrift worden behandeld waterstof, zuurstof, zwavel, de halogenen en de elementen der stikstofgroep, koolstof, silicium en de allerbelangrijkste verbindingen dezer elementen, verder de belangrijkste metalen en hun verbindingen, zoodat men daarbij echter slechts die stoffen behandelt, die in het dagelijksch leven beteekenis hebben of algemeen gebruikt worden bij het experimenteele onderwijs.

2. Organische scheikunde. Voorbeelden van de belangrijkste groepen van organische koolwaterstoffen (methaan, aethaan, aethyleen, acetyleen); alcoholen (methyl- en aethylalcohol, glycerine); aldehyden (formaldehyde); aethers (aethylaether); samengestelde aethers (vetten); zuren (mierenzuur, azijnzuur, boterzuur en de gewone plantenzuren); koolhydraten.

3. Algemeene scheikunde. De belangrijkste hoofdstukken, met gebruikmaking van voorbeelden uit de doorgewerkte leerstof in anorganische en organische scheikunde.

Het onderwijs moet zooveel mogelijk experimenteel gegeven worden. Omtrent practische oefeningen en nieuwe ontdekkingen geldt hetzelfde, als boven voor de naturkunde gezegd is.

Wiskunde.

A. Op de twee taalkundige lijnen.

a. Reken- en stelkunde.

De algemeene kwadratische vergelijking; stellingen over som en product der wortels. Vergelijkingen, die vierkantswortels bevatten.

Veelterm van den tweeden graad; ontbinding in factoren; positieve en negatieve toestand (ongelijkheden van den tweeden graad); maximum en minimum.

Oneindig groote en oneindig kleine grootheden. Grenswaarden.

Volledige bespreking der oplossing van twee vergelijkingen van

den eersten graad met twee onbekenden. Twee vergelijkingen met twee onbekenden, de eene van den eersten, de tweede van den tweeden graad; symmetrische vergelijkingen.

Machten en wortels met rationeele exponenten. Kort wordt besproken, dat het rekenen met irrationale wortelgrootheden wordt opgevat als rekenen met rationale benaderingswaarden; evenzoo wordt besproken, dat een oneven wortel uit een negatief getal noch positief, noch negatief kan wezen, echter zonder dat eenige uiteenzetting wordt gegeven van of rekenoefeningen worden gehouden met complexe getallen.

Logarithmen bij het grondtal 10; de vier logarithmenstellingen; berekening van eenvoudige uitdrukkingen met behulp van een tafel in vier decimalen. De eenvoudigste exponentieele vergelijkingen.

Reken- en meetkundige reeksen. Som van de oneindige meetkundige reeks.

Samengestelde-intrestrekening met zeer eenvoudige toepassingen op annuïteiten.

b. Meetkunde.

Het algemeene bewijs voor de stelling omtrent de evenredigheid der zijden van gelijkvormige driehoeken. Het algemeene bewijs voor de stelling omtrent de oppervlakte van een rechthoek.

De algemeene gelijkvormigheidstheorie met toepassingen op eenvoudige werkstukken. Oppervlakten van gelijkvormige figuren.

Regelmatige veelhoeken. Verdeeling van den cirkelomtrek in 4, 6, 10 en 15 gelijke deelen en berekening der daarmee overeenkomende koorden.

Lengte van den cirkelomtrek en van deelen daarvan. Oppervlakte van cirkel, cirkelsector en cirkelsegment.

De trigonometrische functies (*sinus, cosinus, tangens* en *cotangens*) van scherpe en stompe hoeken met eenvoudige toepassingen op berekeningen in driehoeken.

Toepassing van rechthoekige coördinaten op de graphische voorstelling van eenvoudige functies (b.v. ax, ax^2, $ax^2 + bx + c$, a/x, voor bijzondere waarden der coëfficienten).

B. Op de wis- en natuurkundige lijn.

1. Reken- en stelkunde. De algemeene quadratische vergelijking; de stellingen over som en product der wortels. Vergelijkingen, waarin vierkantswortels optreden.

De veelterm van den tweeden graad. Ontbinding in factoren; positieve en negatieve toestand (ongelijkheden van den tweeden graad); maximum en minimum.

Oneindig groote en oneindig kleine grootheden. Grenswaarden.

Volledige bespreking van de oplossing van twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden; met voorbeelden wordt dezelfde vraag behandeld voor drie vergelijkingen van den eersten graad met drie onbekenden.

Symmetrische vergelijkingen. Vergelijkingen van hoogere graden met twee onbekenden; aan voorbeelden wordt verduidelijkt, hoe men bij de oplossing van zulke vergelijkingen stelsels wortels kan invoeren of verduisteren.

Machten en wortels met rationale exponenten. Berekeningen met irrationale grootheden. Voorbeelden van benadering met eene gegeven nauwkeurigheid.

Logarithmen bij het grondtal 10; de vier logarithmenstellingen; berekening van eenvoudige uitdrukkingen met behulp van een tafel met vier decimalen. Exponentieele vergelijkingen.

Reken- en meetkundige reeksen. De oneindige meetkundige reeks. De harmonische reeks.

Samengestelde-intrestrekening. Annuïteiten.

Complexe getallen. Inductiebewijzen. Permutaties en combinaties zonder herhaling. De binomiaalformule met positieven geheelen exponent.

Grootste gemeene deeler en kleinste gemeene veelvoud van geheele getallen. Priemgetallen; er wordt bewezen, dat een getal slechts in één stel priemfactoren kan worden ontbonden. Onbepaalde vergelijkingen met twee onbekenden.

Deeling van veeltermen; de stelling omtrent deeling door een veelterm van den eersten graad.

Algebraische vergelijkingen: hoogste aantal wortels; complexe wortels van vergelijkingen met reëele coëfficienten; uitdrukking der coëfficienten in de wortels. De binomiale vergelijking.

2. Vlakke meetkunde.

Als op de taalkundige lijnen.

Behalve de uit het onderwijs op de tusschenschool bekende meetkundige plaatsen worden behandeld de meetkundige plaatsen van punten, welker afstanden tot twee gegeven punten of van twee

gegeven lijnen een gegeven verhouding hebben. Punten en lijnen in harmonische ligging. Toepassing op werkstukken.

3. Trigonometrie.

De trigonometrische functies (*sinus, cosinus, tangens, cotangens*) van willekeurige hoeken. Formules voor de functies van een som of verschil van twee hoeken, en voor de functies van den dubbelen of den halven hoek. Logarithmische uitdrukkingen. De grenswaarde van $\frac{\sin x}{x}$ voor $x = 0$. Bepaling van een hoek, waarvan eene trigonometrische functie gegeven is; oplossing van eenvoudige trigonometrische vergelijkingen. Bepaling der elementen van een driehoek, als drie ervan gegeven zijn.

4. Stereometrie.

De voornaamste stellingen over rechte lijn en plat vlak. Convexe veelvlakshoeken; de drievlakshoek; de rechthoekige drievlakshoek; bepaling van een punt in de ruimte met rechthoekige coördinaten.

Veelvlakken: prisma, pyramide en afgeknotte pyramide. Er wordt bewezen, dat er niet meer convexe regelmatige lichamen kunnen bestaan dan de vijf zoogenaamde platonische lichamen, maar van deze worden slechts viervlak, kubus en octaeder volledig behandeld. Cylinder, kegel en afgeknotte kegel. De bol. Grondformules der boldriehoeksmeting met toepassingen op den rechthoekigen boldriehoek.

Congruentie, symmetrie en gelijkvormigheid.

Grootte van het ronde oppervlak van een bolschijf, en van den bol. Inhoud van prisma, pyramide en afgeknotte pyramide, cylinder, kegel en afgeknotten kegel, bol, bolsector en bolsegment.

Er wordt bewezen, dat eene vlakke doorsnede van een omwentelingsoppervlak eene ellips, hyperbool of parabool kan wezen.

Er moet bij het onderwijs de nadruk op gelegd worden, het ruimte-inzicht van de leerlingen te ontwikkelen.

5. Analytische meetkunde van het platte vlak.

Bepaling van punten en krommen met rechthoekige coördinaten en poolcoördinaten. De belangrijkste vormen van de vergelijkingen van rechte lijn en cirkel. Snijding van rechte lijn en cirkel; raaklijn; machtlijn; bepaling van den cirkel door drie punten. Parabool, ellips en hyperbool op de symmetrieassen als coördinatenassen.

Belangrijkste stellingen over brandpunt, richtlijn, raaklijn (asymptoten) en normaal, middellijnen.

6. Infinitesimaalrekening.

Het rekenen met oneindig kleine grootheden als inleiding tot de differentiaal- en integraalrekening. Continuïteit der functies; voorbeelden van continue en discontinue functies. De afgeleide functie. De afgeleide functie van x^n (n rationaal), van de trigonometrische functies, van som, product en quotient en van samengestelde functies. Theorema van Rolle. Maxima en minima. Reeks van Taylor voor geheele functies. Bepaalde en onbepaalde integraal. Integratie van de eenvoudigste functies. Partieele integratie. Eenvoudige toepassingen op meetkundige en natuurkundige vraagstukken.

Bepalingen omtrent examens in natuurwetenschappen en wiskunde.

I. *Tusschenschool.*

Natuurwetenschappen.

Het examen is mondeling. Er worden een groote of twee kleinere vragen gesteld, waarvan een van scheikundigen aard kan zijn; echter mag de vraag over scheikunde voor geen enkelen candidaat de voornaamste vraag worden.

Rekenen en wiskunde.

Het examen wordt zoowel schriftelijk als mondeling afgenomen.

a. Rekenen. Bij het schriftelijke examen worden twee of meer opgaven gesteld, die eenvoudige toepassing van de geleerde rekenregels eischen. Op het mondelinge examen worden het begrip der rekenregels bij den leerling onderzocht en zijne vaardigheid in de toepassing daarvan.

b. en c. Stelkunde en Meetkunde.

Bij het schriftelijk examen worden twee opgaven gesteld, die eenvoudige toepassing eischen van stellingen en methoden uit de geheele behandelde stof; een van deze moet een werkstuk zijn, bij welks beoordeeling ook gelet moet worden op de uitvoering der teekening, de andere eene berekening of eene vergelijking. Bij het

mondeling examen, waar bij voorkeur in de meetkunde geëxamineerd zal worden, moet er gewicht aan gehecht worden, dat de leerling eene nauwkeurige en duidelijke voorstelling van het geleerde kan geven.

II. *De realklasse.*

Natuurwetenschappen.

Het examen is mondeling. Er wordt geëxamineerd over het in den loop van het jaar behandelde. Het examen wordt zooveel mogelijk in verband met voorwerpen (instrumenten) afgenomen.

Practisch rekenen en wiskunde. (Alleen verplicht voor jongens).
Het examen is zoowel schriftelijk als mondeling.

Schriftelijk examen. Er wordt één stel van meer (in den regel drie) afzonderlijke opgaven gegeven, dat in hoofdzaak moet dienen om de vaardigheid van den leerling in het opzetten en uitvoeren van berekeningen te toonen.

Mondeling examen. Aan iederen examinandus worden, naar keuze van den censor [1]), een of twee vragen gesteld, over de in den loop van het jaar behandelde leerstof.

III. *Gymnasium.*

Natuurwetenschappen.

A. Op de twee taalkundige lijnen.

Op het examen, dat mondeling is, wordt geëxamineerd 1) hetzij in algemeene natuurlijke historie (biologie) en physiologie, 2) hetzij in mineralogie en geologie, 3) hetzij in astronomie en aardrijkskunde. Voor het einde van Januari deelt de inspecteur van het onderwijs aan elke school afzonderlijk mede, in welke van deze groepen het examen zal worden afgenomen.

B. Op de wis- en natuurkundige lijn.

a. en b. Natuurkunde en astronomie. Bij het examen, dat mondeling is, wordt geëxamineerd over een begrensd gedeelte, dat bestaat uit twee van de volgende vijf hoofdstukken: astronomie, warmte,

---

[1]) Censoren zijn bijzitters; voor eenige vakken worden deze door de onderwijsinspectie aangewezen (voornamelijk leeraren van andere scholen); voor de vakken, waarvoor in zeker jaar de inspectie geen censoren aanwijst, kan de examineerende school censoren uitnoodigen.

geluid, magnetisme en electriciteit, mechanische physica (of eventueel een gedeelte van denzelfden omvang) en bovendien over vijftien van de uitgevoerde practische oefeningen. Deze, zoowel als het eene hoofdstuk, worden door de school gekozen, terwijl de inspecteur van het onderwijs het andere hoofdstuk uitkiest, en hiervan mededeeling doet voor het einde der maand Januari.

Er worden twee vragen gesteld, een over een der opgegeven hoofdstukken en een over de practische oefeningen.

c. Scheikunde. Bij het examen, dat mondeling is, wordt geëxamineerd over een begrensd, door de school gekozen gedeelte, dat ongeveer de helft van het behandelde omvat.

Wiskunde.

A. Op de twee taalkundige lijnen.

Bij het examen, dat mondeling is, wordt geëxamineerd over een begrensd gedeelte, ongeveer de helft van het behandelde, en dat door den inspecteur van het onderwijs wordt opgegeven voor het einde van de maand Januari. Er worden twee vragen gesteld, waarvan de eene bestaat in de oplossing van een of meer gemakkelijke opgaven, die slechts eenvoudige toepassingen van de behandelde stellingen mogen zijn.

B. Op de wis- en natuurkundige lijn.

Bij het mondelinge examen wordt geëxamineerd in een beperkt gedeelte, ongeveer de helft van het behandelde. De inspecteur van het onderwijs deelt iedere school mede, wat zal worden opgegeven, en zendt hiervan bericht voor het einde der maand Januari.

Bij het schriftelijke examen worden twee stellen opgaven gesteld. Ten minste de helft der opgaven moeten onmiddellijke toepassingen zijn van behandelde stellingen. Een van de opgaven kan bestaan in het geven van het bewijs van een stelling in het voor het mondelinge examen opgegeven gedeelte.

HERVORMINGSPLANNEN.

Tegen de thans bestaande inrichting van het onderwijs kunnen geen paedagogische bezwaren van eenige beteekenis worden ingebracht, maar het is een bezwaar gebleken, dat de tusschenschool haar onderwijs eerst beëindigt een jaar nadat de schoolplichtige

leeftijd ophoudt. Te veel leerlingen verlaten de tusschenschool uit de derde klasse, en krijgen zoodoende een onderwijs, waaraan eene geschikte afsluiting ontbreekt.

Het ministerie van onderwijs stelde daarom (October 1928) eene commissie in, die een *memorie betreffende het middelbaar onderwijs* moest opstellen. Deze commissie heeft hare werkzaamheden in December 1930 beëindigd, en de memorie is thans gepubliceerd.

Voorgesteld wordt, dat het middelbaar onderwijs op de volgende wijze wordt georganiseerd:

„In aansluiting aan een uitgebreid kinderschoolonderwijs tot den leeftijd van 14 jaar, dat behalve de gewone lagere-schoolvakken Engelsch, Duitsch, natuurwetenschappen en wiskunde omvat, wordt een verdergaand onderwijs gegeven, deels in vier gymnasiumklassen van het veertiende tot het achttiende jaar, afgesloten door het studentenexamen, deels in twee realklassen, van het veertiende tot het zestiende jaar, afgesloten door het realeksamen."

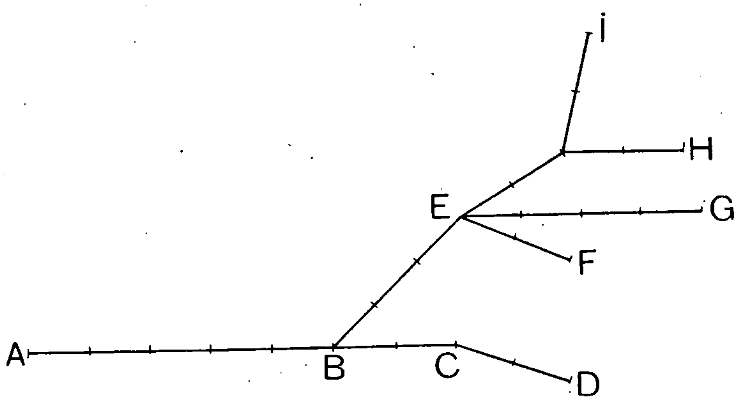
„In het gymnasium wordt een hooger algemeen onderwijs gegeven, dat tevens den noodzakelijken grondslag legt voor verdergaande studiën."

„Het onderwijs in het gymnasium zal kunnen worden gegeven op twee ten deele verschillende lijnen: de taalkundige en de wis- en natuurkundige lijn. Binnen de taalkundige lijn kan in de derde en vierde klasse eene splitsing plaats vinden, zoodat wat de vreemde talen betreft het hoofdgewicht gelegd kan worden hetzij op de moderne talen, hetzij op Latijn en Grieksch."

„In de realklassen wordt een algemeen ontwikkelend onderwijs gegeven, dat erop berekend is, de leerlingen geschikt te maken om hun intrede in het zakenleven te doen of staats- of gemeentebetrekkingen te aanvaarden, en tevens den grondslag legt voor verdere ontwikkeling aan zekere hoogere onderwijsinrichtingen."

De naam „tusschenschool" zal niet meer worden gebruikt, maar er wordt eene driejarige voorschool ingericht, voor de leeftijden, beantwoordende aan de jongste drie klassen der tegenwoordige tusschenschool.

Het schema op bladzijde 198 wordt dus zoodanig gewijzigd, dat BE met een jaar verkort wordt, terwijl EF, EG, EH en EJ met een jaar worden verlengd (EH en EJ samenvallend over de eerste twee jaar); aldus:



Ontwerp voor een normale urentabel voor de driejarige voorschool.

	1e kl.	2e kl.	3e kl.
Godsdienstonderwijs	2	2	2
Deensch	5	4	4
Engelsch	5	3	3
Duitsch	—	5	5
Rekenen en wiskunde	4	5	5
Geschiedenis	2	2	2
Aardrijkskunde	2	2	2
Natuurlijke Historie	2	2	2
Natuurwetenschappen	2	2	2
Zang	1	1	—
Schrijven	2	1	1
	27	29	28
Teekenen, lichamelijke oefening, handwerken, huishoudonderwijs, slöjd, schriftelijk werk op school	7	6	7
	34	35	35

Ontwerp voor een normale urentabel voor de tweeklassige realafdeeling.

	1e kl.	2e kl.
Godsdienstonderwijs	—	1
Deensch	4	5
Engelsch	3	5

Duitsch	3	5
Rekenen en algebra [Regning og Aritmetik] . .	4	4
Geschiedenis	1	3
Aardrijkskunde	4	—
Natuurlijke historie en gezondheidsleer	4	—
Natuurkunde met scheikunde	2	—
Lichamelijke oefening	4	4
	29	29

Facultatieve vakken.

Fransch	(3)	(3)	(3)	(3)	
Latijn	(2)		(2)		
Meetkunde		(2)		(2)	
Zang	—		—		
Schrijven	—		—		
Teekenen	—		—		
Slöjd	—		—		7
Handwerken	—		—		
Huishoudonderwijs	—		—		
Boekhouden	—		—		
Machineschrijven	—		—		
Stenographie	—		—		
Uren voor schriftelijke oefeningen .	(2)		(2)		
	36		36		

Ontwerp voor een normale urentabel voor het gymnasium.

	Ie klasse		IIe klasse		IIIe klasse			IVe klasse		
	kl. mod.	w-n.	kl. mod.	w-n.	kl.	mod.	w-n.	kl.	mod.	w-n.
Godsdienstonderwijs	—	—	2	2	1	1	1	1	1	1
Deensch	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Engelsch	4	4	3	3	2	5	2	2	5	2
Duitsch	4	4	3	3		5			5	
Fransch	—	—	4	4	4	4	4	4	4	4
Grieksch	—	—	—	—	8	—	—	8	—	—
Latijn	4	—	4	—	6	4	—	7	4	—
Archaeologie . . .	—	—	—	—	1	2	2	—	2	2
Geschiedenis . . .	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3

Natuurvakken										
{ Aardrijkskunde . .	4	4	3	3	—	—	—	—	—	—
{ Biologie, Physiologie	—	—	—	2	2	2	2	2	2	2
Natuur- en scheikunde	2	4	2	5	—	—	6	—	—	6
Wiskunde	4	6	4	5	—	—	6	—	—	6
Practische economie	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—
	28	28	30	30	30	30	29	30	30	29
Lich. oefening . .	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Zang	—	—	—	—	1	1	1	1	1	1
Eventueel:										
Teekenen, slöjd, handwerken, zingen in 1e en 2e kl., boekhouden en andere vakken	(3)	(3)	(1)	(1)	—	—	(1)	—	—	(1)
Totaal ten hoogste	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35

Ontwerp voor bepalingen omtrent het onderwijs in natuurwetenschappen en wiskunde.

I. *De driejarige voorschool.*

Natuurwetenschappen (natuur- en scheikunde).

Het doel van het onderwijs is, den leerlingen belangstelling bij te brengen voor en het begrijpen mogelijk te maken van een aantal verschijnselen, die zij in het dagelijksch leven tegenkomen, en die niet kunnen worden begrepen zonder eenige elementaire kennis op het gebied der natuur- en scheikunde.

Het onderwijs moet den leerlingen zeer elementaire, op eenvoudige proeven gebaseerde kennis verschaffen van de zwaartekracht, de lucht en den luchtdruk, vloeistoffen, warmteleer, magnetisme en electriciteit, geluid en licht, alsmede het allerelementairste van bewegingsleer, arbeid en machines; daarenboven moet kennis worden bijgebracht van belangrijke eenvoudige chemische verbindingen en de elementen, waaruit deze zijn opgebouwd.

Rekenen en wiskunde.

Het doel van het onderwijs is, wat het rekenen betreft, den leer-

lingen te leeren, berekeningen met getallen juist en vaardig uit te voeren, en deze vaardigheid aan te wenden op vraagstukken van niet te samengestelden aard.

In de reken- en stelkunde [Aritmetik] moet niet gestreefd worden naar systematischen opbouw, maar het langs practischen weg verworven inzicht in de rekenregels moet worden overgebracht op uitdrukkingen met letters om daardoor het algemeen karakter van deze regels duidelijk te maken, en de algemeene algebraische [aritmetiske] methode moet worden toegepast om vraagstukken op te lossen, die anders ingewikkelder redeneeringen zouden vereischen.

Het doel van het onderwijs in de meetkunde is, den leerlingen inzicht te geven in de eigenschappen van vorm en grootte van eenvoudige vlakke figuren, hun te leeren, een figuur nauwkeurig samen te stellen uit gegeven elementen, en hun ruimteinzicht te ontwikkelen door de beschouwing van modellen van eenvoudige lichamen.

Het onderwijs moet de volgende onderwerpen omvatten:

I. Rekenen en stelkunde.

1. De vier hoofdbewerkingen met positieve geheele getallen en breuken (hieronder begrepen decimale breuken; afronding van decimale breuken en invloed hiervan op het resultaat).

2. Overbrenging der rekenregels op de herleiding van eenvoudige uitdrukkingen met letters. Vergelijkingen van den eersten graad met één onbekende.

3. Priemgetallen, ontbinding in priemfactoren. Grootste gemeene deeler en kleinste gemeene veelvoud. Deelbaarheid door 2, 5, 3 en 9. Toepassingen op het rekenen met breuken.

4. Verhoudings-, verdeelings en mengingsrekening. (De opgaven moeten in hoofdzaak aanleiding geven tot rechtstreeksche bewerkingen).

5. Procentrekening met toepassingen op het handelsrekenen, renteberekening, koop en verkoop van waardepapieren: wissels, aandeelen en obligaties. (Ook hier moeten de opgaven in hoofdzaak rechtstreeksche bewerkingen vereischen).

II. Meetkunde.

In de vlakke meetkunde wordt behandeld: de rechte lijn en de cirkel, meting van lijnstukken, meting van cirkelbogen, zoo-

wel in lengtemaat als in boogmaat, figuren (veelhoek, cirkelsector, cirkelsegment), congruentie, symmetrie en oppervlakte.

Nadere aanduiding van de leerstof:

1. Snijding van twee lijnen, evenwijdige lijnen, meting van hoeken, nevenhoeken, overstaande hoeken, constructie van hoeken van 90° en 60° en daarvan afgeleide hoeken.

2. De driehoek: som der hoeken, hoogtelijn, zwaartelijn, hoekdeellijn, gelijkbeenige en gelijkzijdige driehoek.

3. De vierhoek: som der hoeken, stellingen over zijden, hoeken en diagonalen in het parallelogram (in het bijzonder vierkant, rechthoek en ruit).

4. De cirkel: koorde, raaklijn, omtrekshoek, hoek van raaklijnen, regelmatige veelhoeken en verdeeling van den cirkelomtrek.

5. Oppervlakte van rechthoek, parallelogram, driehoek, trapezium, cirkel en cirkelsector.

6. Constructies berustende op de volgende meetkundige plaatsen:

a) Meetkundige plaats der punten met gegeven afstand tot een gegeven punt.

b) Meetkundige plaats der punten met een gegeven afstand tot eene gegeven lijn.

c) Meetkundige plaats der punten met gelijke afstanden tot de eindpunten van een lijnstuk.

d) Meetkundige plaats der punten met gelijke afstanden van de beenen van een hoek.

e) Meetkundige plaats der punten, waaruit men een gegeven lijnstuk onder een rechten hoek ziet.

Daarenboven wordt, op grond van modellen, eène beschrijving gegeven van blok, recht prisma, pyramide, cylinder, kegel en bol; berekening van oppervlakte en inhoud dezer lichamen volgens medegedeelde formules; opgaven over gewicht en soortelijk gewicht.

II. *De tweeklassige reaalschool.*

Natuurwetenschappen (natuur- en scheikunde).

Het doel van het onderwijs, dat voortbouwt op den door het voorafgegane onderwijs gelegden grondslag, is, het algemeene natuurkundige begrip der leerlingen te ontwikkelen, en hun een ruimeren voorraad kennis bij te brengen, die in het algemeen nuttig kan zijn en in het bijzonder kan dienen als grondslag voor verdere

ontwikkeling aan hoogere onderwijsinrichtingen. Het onderwijs zal in hoofdzaak experimenteel gegeven worden. Het onderwijs omvat onderwerpen binnen de volgende gebieden: warmte, scheikunde, electriciteit, energieleer en spectraalanalyse. Uit elk van deze gebieden worden bijzonder belangrijke en practische vragen besproken, al naar het urental en de algemeene ontwikkeling der leerlingen zulks veroorloven.

Rekenen en wiskunde.

Het doel van het onderwijs is, in aansluiting aan het voorafgegane onderwijs, wat betreft het rekenen den leerlingen te leeren, vraagstukken te behandelen, die beteekenis kunnen hebben voor de practijk, en hen erin te oefenen, de in de vraagstukken voorkomende berekeningen juist en vlug uit te voeren; wat de wiskunde betreft, den leerlingen een aantal elementaire begrippen bij te brengen, die aan onze opvatting van getal en ruimte ten grondslag liggen, en hen vertrouwd te maken met de wiskundige beschouwingswijze, vooral met het oog op de practische toepassing daarvan.

Het onderwijs moet rekenen en algebra omvatten, en kan tevens meetkunde omvatten.

I. Rekenen.

De in de voorschool behandelde hoofdstukken worden verdiept, doordat hier ook opgaven van terugwerkenden aard worden behandeld.

Als nieuwe stof worden toepassingen van het gebruik van tafels behandeld: kwadraattafel, logarithmentafel, rentetafel, trigonometrische tafels.

II. Reken- en stelkunde [Aritmetik].

1. De vier hoofdbewerkingen worden uitgebreid tot negatieve getallen. Toepassing op herleiding van uitdrukkingen met letters.

2. Machten en wortels met rationale exponenten (geen eigenlijke theorie van het irrationale getal), logarithmen (tafels met vier decimalen).

3. Sommeering van reken- en meetkundige reeksen.

4. Samengestelde intrest (waaronder eenvoudige opgaven over annuïteiten).

5. Oplossing van vergelijkingen:
één vergelijking van den eersten graad met één onbekende,
één vergelijking van den tweeden graad met één onbekende,
twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden,
twee vergelijkingen, de eene van den 1en, de andere van den 2en graad, met twee onbekenden.

6. Evenredigheden, recht en omgekeerd evenredige grootheden.

7. Graphische voorstelling van functies van practischen oorsprong, alsmede graphische voorstelling ter aanschouwelijke voorstelling van rechte en omgekeerde evenredigheid, machten, wortels en logarithmen (afbeelding van de functies ax, a/x, x^n, 10^x).

III. Meetkunde.

1. Gelijkvormige [ensvinklede] driehoeken, de stelling over de evenredigheid der zijden en de omgekeerde stelling. De rechthoekige driehoek, sinus, cosinus en tangens van scherpe en stompe hoeken. Tafels in vier decimalen van de numerieke waarden dezer functies (decimale onderverdeeling van den graad). Oplossing van driehoeken. Berekeningen, die teruggevoerd kunnen worden tot de berekening van zijden en hoeken van een driehoek. Berekening van de stralen van omgeschreven en ingeschreven cirkel van een driehoek. Bepaling van de oppervlakte van een driehoek en van eenvoudige figuren begrensd door rechte lijnen en cirkelbogen.

2. Constructies op grond van de in de voorschool behandelde meetkundige plaatsen, maar zoo, dat ook willekeurige gezichtshoeken worden behandeld. Constructie van vierde evenredige en middenevenredige. Constructie van een veelhoek, gelijkvormig [ligedannet] met een gegevene, zoomede de bepaling der verhouding van omtrek en oppervlakte van twee zoodanige gelijkvormige veelhoeken.

3. Uitgaande van modellen, wordt eene beschrijving gegeven van recht prisma, onwentelingscylinder, pyramide, omwentelingskegel en bol. Netwerk der oppervlakken van de eerste vier lichamen. Berekening van elementen van eene op eenvoudige wijze aangebrachte vlakke doorsnede; voor de pyramide bij voorbeeld eene doorsnede door de hoogte en een opstaande ribbe of door de hoogte loodrecht op eene ribbe van het grondvlak (hierbij worden de hoek tusschen eene rechte lijn en een plat vlak en de hoek tusschen twee

vlakken besproken). Berekening van oppervlakte en inhoud der genoemde lichamen volgens medegedeelde formules.

III. *Gymnasium.*

Natuurwetenschappen (Natuurkunde, scheikunde).

A. De wis- en natuurkundige lijn.

Het onderwijs zal omvatten:

a) Natuurkunde met sterrenkunde.

1. Warmteleer. Hoeveelheid warmte, soortelijke warmte, smelting, oplossing, verdampen, koken, dampdruk, verdichting en uitzetting van gassen, toestandsvergelijking der gassen, gasthermometer, kinetische gastheorie, voortplanting der warmte, meting van den vochtigheidstoestand.

2. Licht. Voortplanting van het licht, vlakke spiegels, bolvormige spiegels; breking van het licht, prisma's, lenzen, toepassingen der lenzen. Photometrie. Snelheid van het licht. Spectraalanalyse. Natuurkundige gesteldheid der hemellichamen. Iets over den aard van het licht.

3. Mechanische natuurkunde. Samenstelling en ontbinding van krachten, evenwichtsvoorwaarden, snelheid en versnelling, beginselen der bewegingsleer, kracht en massa, C.-G.-S.-systeem, arbeid en arbeidsvermogen, beweging onder de werking van een constante kracht, wrijving, beweging onder centrale krachten, cirkelbeweging, elastische trillingen, slinger, botsing, de algemeene aantrekking. Druk in vloeistoffen en gassen, bepalingen van het soortelijke gewicht, moleculaire krachten. Golfbeweging, geluid.

4. Electriciteit. Electrolyse, elementen en accumulatoren, thermo-electriciteit, wet van Ohm met toepassingen, electrische metingen, magnetisme, electrostatica, electrisch arbeidsvermogen, electromagnetisme, inductie, gelijkstroomdynamo's en -motoren, wisselstroom, electrische trillingen, radiogolven, electrische stralen, radioactiviteit, atoomtheorie.

5. Sterrenkunde. Uiterlijk en schijnbare beweging van den sterrenhemel; schijnbare en ware beweging van zon, maan en planeten; vorm en grootte der aarde, tijds- en plaatsbepalingen, verduisteringen, kometen en vallende sterren, de sterrenwereld.

Het onderwijs wordt zooveel mogelijk experimenteel gegeven. Aan practische oefeningen door de leerlingen wordt een tijd

besteed, die overeenkomt met twee wekelijksche lesuren in 1½ jaar.

Belangrijke nieuwe ontdekkingen op het gebied der natuurkunde moeten in de leerstof worden opgenomen.

b). Scheikunde.

1. Anorganische scheikunde. Met gebruikmaking van het scheikundig teekenschrift worden behandeld: waterstof, zuurstof, de halogenen, zwavel, stikstof, phosphor, koolstof en silicium en de belangrijkste verbindingen van deze elementen. Voorts de belangrijkste metalen en hunne verbindingen. Er worde vooral aandacht besteed aan stoffen, die kunnen dienen om algemeene wetten en theorieën te illustreeren, of algemeen gebruikt worden bij het experimenteele onderwijs.

2. Organische scheikunde. Voorbeelden van de belangrijkste groepen van organische verbindingen: koolwaterstoffen, alcoholen, aldehyden, zuren, aethers, esters, koolhydraten en iets over eiwitstoffen.

3. Physische en theoretische scheikunde. De belangrijkste algemeene theorieën en physisch-chemische wetten zoo uitgebreid, als een samenvattend begrip van de scheikundige reacties, die bij de behandeling der enkele stoffen ter sprake komen, vereischt.

De uiteenzetting wordt, waar de aard der leerstof dit mogelijk maakt, gebaseerd op proeven, en de practische oefeningen der leerlingen worden organisch in den experimenteelen leergang opgenomen.

Belangrijke nieuwe ontdekkingen op het gebied der scheikunde moeten in de leerstof worden opgenomen.

B. De taalkundige lijn.

Het onderwijs beoogt den leerlingen te geven: 1) een noodzakelijken grondslag voor het onderwijs in natuurwetenschappen [Naturfag] [1]); 2) eenig inzicht aangaande practische toepassingen der natuurkunde, waarmede zij dagelijks in aanraking komen; 3) eene algemeene ontwikkeling, ook op natuurwetenschappelijk gebied.

De onderwerpen, die als voorwerp van het onderwijs zijn aangewezen, zijn:

---

[1]) Onder „Naturfag" worden samengevat dierkunde, plantkunde, biologie, physiologie, geologie, mineralogie en meteorologie.

1) Scheikunde, die met het oog op het onderwijs in de natuurvakken van zoodanigen omvang kan zijn, dat zij beslag legt op het grootste deel van den voor het onderwijs beschikbaren tijd in een jaar.

2) Warmteleer (in hoofdzaak kennis van het begrip calorie).

3) Leer van de energie.

4) Electriciteitsleer. Hoofdstukken, die deelen van de toepassingen der electriciteit behandelen, welke de leerlingen in het dagelijksch leven ontmoeten, alsook hoofdstukken, die nieuwe ontdekkingen van groote beteekenis, zoowel voor de hedendaagsche techniek als voor het hedendaagsche geestelijk leven, behandelen.

Wiskunde.

Het doel van het onderwijs is, den leerlingen de begrippen bij te brengen, die ten grondslag liggen aan onze opvattingen van getal en ruimte, ze vertrouwd te maken met de wiskundige beschouwingswijze, en hun middelen te verschaffen om hun begrip te verdiepen op gebieden, waar de wiskunde wordt toegepast. Voorts moeten de leerlingen het apparaat der wiskundige formules leeren gebruiken, en zekerheid en vaardigheid in numeriek rekenen verkrijgen, alles binnen de grenzen, die door onderstaande eischen worden vastgelegd.

Op de wis- en natuurkundige lijn moeten de leerlingen zich een geschikten grondslag voor verdergaande wiskundige studiën eigen maken.

Het onderwijs zal de volgende onderwerpen omvatten:

A. De wis- en natuurkundige lijn.

Ie en IIe klasse van het gymnasium.

Reken- en stelkunde.

1. De vier hoofdbewerkingen uitgebreid tot negatieve getallen. Herleiding van uitdrukkingen met letters. Vergelijkingen van den eersten graad met één of meer onbekenden. Evenredigheden. Deeling van veeltermen. Grootste gemeene deeler van veeltermen met toepassingen.

2. Machten en wortels met rationale exponenten (een eigenlijke theorie der irrationale getallen wordt niet verlangd). Vierkantsworteltrekking. Voorbeelden van benaderde berekening met een

gegeven nauwkeurigheid. Logarithmen bij het grondtal 10 met toepassingen op berekeningen.

3. De vierkantsvergelijking. De stelling over som en product der wortels. Vergelijkingen, die de onbekende onder vierkantswortelteekens bevatten. Vergelijkingen met twee onbekenden, de eene van den eersten, de tweede van den tweeden graad (hierbij symmetrische vergelijkingen).

4. Reken- en meetkundige reeksen.

5. Samengestelde intrest: afleiding van de formule $k_n = k(1 + r)^n$ voor geheele waarden van n. Toepassingen op annuïteiten.

6. Invoering van het functiebegrip. Graphische voorstelling van functies van practischen oorsprong alsmede van de functies:

$y = ax$, $y = a/x$ } Recht en omgekeerd evenredige grootheden.

$y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$ } Bepaling van nulpunten, teeken, maxima, en minima.

$y = x^n$ (voor geheele positieve n)

$y = 10^x$

Meetkunde.

1. Gelijkvormige [ensvinklede] driehoeken. De stelling over de evenredigheid der zijden en de omgekeerde stelling. De rechthoekige driehoek. Verdeeling van een lijnstuk in eene gegeven verhouding.

2. Trigonometrie. Sinus, cosinus, tangens en cotangens van scherpe en stompe hoeken. Oplossing van driehoeken (hierbij formules voor de oppervlakte van den driehoek en de stralen van om- en ingeschreven cirkel). Berekeningen, die kunnen worden teruggebracht tot de bepaling van zijden en hoeken in een driehoek. Berekening van oppervlakten van door rechte lijnen en cirkelbogen begrensde figuren.

3. Gelijkvormige [ligedannede] figuren. Verhouding tusschen omtrekken van gelijkvormige veelhoeken en tusschen hunne oppervlakten.

4. Constructies berustende op de in de voorschool behandelde meetkundige plaatsen, maar nu worden ook gezichtshoeken van willekeurige grootte behandeld. Constructies van vierde evenredige en middelevenredige. Constructies, waarin de gelijkvormigheid wordt toegepast.

5. Met behulp van modellen wordt eene beschrijving gegeven

van recht-prisma, omwentelingscylinder, pyramide, omwentelingskegel en bol. Ontwikkeling van het oppervlak der eerste vier lichamen. Constructie en berekening der elementen eener eenvoudig aangebrachte vlakke doorsnede (hierbij worden de hoek tusschen rechte lijn en plat vlak en de de hoek tusschen twee vlakken behandeld). Berekening van oppervlakte en inhoud der genoemde lichamen volgens medegedeelde formules.

Voor berekeningen wordt geoefend in het gebruik van de logarithmentafel met vier decimalen, tafels in vier decimalen van de waarden der trigonometrische functies en haar logarithmen, kwadraattafel en rentetafel (eenvoudige interpolatie wordt verklaard).

IIIe en IVe klasse van het gymnasium.

1. Definitie van en rekenen met irrationale getallen. Grenswaarden. Verklaring der uitdrukkingen convergent en divergent bij reeksen. Toepassing op de oneindig voortloopende meetkundige reeks en de harmonische reeks. Oneindige decimale breuken. Het inductiebewijs. Permutaties en combinaties van verschillende elementen. De binomiaalformule voor geheele positieve exponenten.

2. Continue functies en differentieerbare functies. Het differentiaalquotient van eene som, een product, een quotient en eene samengestelde functie. De eenvoudige middelwaardestelling. Maxima en minima.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ als } f'(a) \text{ en } g'(a) \text{ bestaan en } g'(a) \neq 0 \text{ is.}$$

3. Definitie en berekening van lengte van cirkelbogen en de oppervlakte van den cirkel en van deelen daarvan.

4. De volgende functies worden onderzocht en hare differentiaalquotienten bepaald:

a. x^n (voor reëele n).

b. de geheele rationale functie.

c. voorbeelden van gebroken rationale functies.

d. de trigonometrische functies sinus, cosinus, tangens en cotangens voor willekeurige hoeken.
Betrekkingen tusschen de trigonometrische functies. Formules voor de functies van eene som en een verschil van twee hoeken, voor functies van den dubbelen en den halven hoek. Logarithmische formules.

e. De exponentieele functie (in het bijzonder e^x) en de logarithmische functie.

5. Integraalrekening: de bepaalde en de onbepaalde integraal, met eenvoudige toepassingen op de sub 4 genoemde functies. Integratie door substitutie en door partieele integratie. Toepassingen op oppervlakte- en inhoudsbepalingen.

6. Vergelijkingen. Er wordt bewezen, dat eene algebraische vergelijking van den n-den graad ten hoogste n verschillende wortels heeft. Bepaling der rationale wortels van eene algebraische vergelijking met geheele coëfficienten. Voorbeelden van benaderde berekening van irrationale wortels. Voorbeelden van oplossing van algebraische vergelijkingen met meer onbekenden (hieronder symmetrische vergelijkingen met twee onbekenden). Oplossing en discussie van twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden.

7. Analytische meetkunde (rechthoekige coördinaten): de belangrijkste vormen voor de vergelijking der rechte lijn, waaronder de normaalvorm. Hoek tusschen twee lijnen. Vergelijking van den cirkel; vergelijking van de raaklijn aan den cirkel. De cirkel bepaald door drie punten. Macht van een punt t.o.v. een cirkel. Machtlijn van twee cirkels. De parabool op symmetrieas en topraaklijn als coördinatenassen. Vergelijking van raaklijn, normaal en middellijn. Ellips en hyperbool op de symmetrieassen als coördinatenassen. Vergelijkingen van raaklijn, normaal, middellijn, richtlijn en asymptoten der hyperbool. Assenverschuiving. Parametervoorstelling van rechte lijn, cirkel, ellips en hyperbool. Bepaling van meetkundige plaatsen langs analytischen weg.

8. Constructies berustende op de vroeger geleerde meetkundige plaatsen en de volgende nieuwe: meetkundige plaats der punten, welker afstanden tot twee gegeven punten een gegeven verhouding hebben; meetkundige plaats der punten welker afstanden tot twee gegeven lijnen een gegeven verhouding hebben.

9. Voornaamste stellingen over rechte lijn en plat vlak. Convexe veelvlakshoeken; de drievlakshoek; bepaling van een punt in de ruimte met rechthoekige coördinaten. Behandeling van de in de 1e en 2e klasse besproken figuren, alsmede van afgeknotte pyramide, afgeknotte kegel, prismoide, bolsector en bolsegment. Oppervlakte- en inhoudsbepalingen van de genoemde lichamen. De regelmatige veelvlakken. Congruentie, symmetrie en gelijkvormigheid van

figuren in de ruimte. Bepaling van den aard der vlakke doorsneden van omwentelingscylinder en omwentelingskegel. Boldriehoeksmeting: de grondformules der boldriehoeksmeting en haar toepassingen op eenvoudige berekeningen.

De in de eerste en tweede klasse verworven kennis wordt verdiept en op peil gehouden met behulp van meer samengestelde opgaven.

B. *De taalkundige lijn.*

1. De vier hoofdbewerkingen uitgebreid tot negatieve getallen. Herleiding van uitdrukkingen met letters. Evenredigheden. Vergelijkingen van den eersten graad met één en meer onbekenden.

2. Definitie en rekenregels voor machten en wortels met rationale exponenten (geen eigenlijke theorie der irrationaliteit). Definitie van logarithmen bij het grondtal 10 en hun gebruik bij eenvoudige berekeningen (Vermenigvuldiging, deeling, machtsverheffing en worteltrekking).

3. Som van de meetkundige reeks.

Samengestelde intrest, afleiding der formule $k_n = k(1 + r)^n$ voor geheele waarden van n. Eenvoudige toepassingen op annuïteiten.

4. De vierkantsvergelijking. De stellingen over som en product der wortels. Ontbinding van een veelterm van den tweeden graad in factoren. Twee vergelijkingen met twee onbekenden, de eene van den eersten, de andere van den tweeden graad.

5. Invoering van het functiebegrip.

Het rechthoekige coördinatenstelsel en zijn gebruik voor de afbeelding van functies, gedeeltelijk van practischen oorsprong, gedeeltelijk functies, die wiskundig kunnen worden uitgedrukt, in het bijzonder de volgende functies voor bijzondere waarden der constanten:

$y = ax$ en $y = a/x$ (recht- en omgekeerd evenredige grootheden).

$y = ax + b$.

$y = ax^2 + bx + c$ (Bepaling van nulpunten, teeken, maxima en minima).

$y = x^n$ (n geheel en positief).

$y = 10^x$.

6. De voor de berekenende meetkunde noodzakelijke stellingen over gelijkvormige driehoeken, vooral de stellingen over den rechthoekigen driehoek. Constructies voor vierde evenredige en middelevenredige. Sinus, cosinus, tangens en cotangens van scherpe en

stompe hoeken en hun gebruik tot het berekenen van lijnstukken, hoeken en oppervlakten, en tot het berekenen van gemakkelijk bereikbare stukken in de op de voorschool behandelde lichamen (b.v. hoogten, ribben, hoek tusschen ribbe en grondvlak, hoek tusschen opstaand zijvlak en grondvlak, straal van kleine cirkels).

Er moet zorg besteed worden aan oefening in berekeningen, en hiertoe worden kwadraattafel, rentetafels en tafels in vier decimalen van de logarithmen en de trigonometrische functies ingevoerd.

Practische economie.

Modern-taalkundige afdeeling der taalkundige lijn.

Het onderwijs omvat onderwerpen van algemeenen aard, die beteekenis hebben voor den handel. Door practische opgaven (mondeling en schriftelijk) wordt den leerlingen een beperkte kennis bijgebracht van het inrichten eener boekhouding, obligaties, aandeelen, wissels, werking van banken en spaarbanken en hypotheek op onroerende goederen, waarbij tevens getracht zal worden, de vaardigheid in het elementaire rekenen te bewaren.

AANHANGSEL.

Hieronder volgen de opgaven van het „Studentenexamen" gehouden in September 1930; dit examen is te vergelijken met ons eindexamen van H. B. S. of gymnasium B. Zij zijn overgedrukt uit Matematisk Tidsskrift A, jaargang 1930. In dit tijdschrift kan de belangstellende lezer ook de opgaven van verschillende andere in bovenstaand artikel genoemde examens vinden.

I.

1. Onderzoek en teeken de kromme, waarvan de vergelijking is

$$y = x^2\left(\frac{5-x}{3}\right)^3.$$

Bereken de oppervlakte der figuur, die wordt begrensd door de kromme en de x-as.

2. Gegeven zijn de cirkels

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ en } (x-a)^2 + y^2 = R^2.$$

P is een willekeurig punt op den eersten cirkel. Bewijs dat de verhouding van de macht van P t.o.v. den anderen cirkel tot den afstand van P tot de machtlijn der beide cirkels constant is.

3. In eene pyramide met inhoud v wordt de hoogte in drie gelijke deelen verdeeld, door de deelpunten worden vlakken loodrecht op de hoogte gebracht.

Bereken den inhoud van elk der deelen, waarin de pyramide daardoor wordt verdeeld.

II.

1. In een ruit, waarvan de diagonalen zijn d en d_1, wordt een rechthoek beschreven, waarvan de zijden evenwijdig zijn met de diagonalen van de ruit.

Bereken de maximale oppervlakte, die de rechthoek hebben kan, uitgedrukt in d en d_1.

2. In de tweede-graadsvergelijking $x^2 + px + q = 0$ stellen p en q geheele getallen voor, verder is gegeven, dat de vergelijking gelijke wortels heeft.

Bewijs, dat $p + q + 1$ een volkomen quadraat is, en los de vergelijking op, als dat quadraat 9 is.

3. Bereken de scherpe hoeken van een rechthoekigen driehoek, waarvan de hypotenusa 5 maal zoo groot is als de straal van den ingeschreven cirkel, en bereken de verhoudingen der zijden nauwkeurig in drie decimalen.

Critiek op de bovenstaande hervormingsplannen vindt de belangstellende lezer in Matematisk Tidsskrift A, 1931, bladzijde 27—66.

HET ONEINDIGE IN DE SCHOOLWISKUNDE,

DOOR

Prof. Dr. FRED. SCHUH.

(Voordracht gehouden te Utrecht op 7 Maart 1931 op de 6de Algemeene Bijeenkomst van Wiskunde-leeraren).

Wanneer ik hier ga spreken over het Oneindige in de Schoolwiskunde, zal ik dit doen door een overzicht te geven over de verschillende gebieden der Wiskunde, waar het oneindige zich opdringt, om dan daarbij telkens na te gaan wat daarvan in het elementaire Wiskunde-onderwijs kan worden ingelascht.

1. Het oneindige als resultaat van een deeling door nul. In allerlei deelen der wiskunde kan men aan het invoeren van het oneindigheidsbegrip niet ontkomen. Zoo doet zich reeds aanstonds in de Rekenkunde de wensch gevoelen de deeling door 0 mogelijk te maken, op soortgelijke wijze als waarop de aftrekking onbeperkt mogelijk gemaakt is door de negatieve getallen in te voeren en waarop de deeling tot de invoering der gebroken getallen geleid heeft. Men zou dus kunnen trachten vooreerst *de deeling 1 : 0 mogelijk te maken* door invoering van een nieuw getal, dat oneindig, of oneindig groot, genoemd wordt en door het teeken ∞ wordt voorgesteld.

De overige uitbreidingen van het getalbegrip gelukken op zoodanige wijze, dat alle rekenregels, berustende op de zoogenaamde grondeigenschappen, behouden blijven. Deze grondeigenschappen zijn de commutatieve, associatieve, distributieve en modulaire eigenschappen, die aldus luiden:

$$a + b = b + a, \qquad (a + b) + c = a + (b + c), \qquad 0 + a = a,$$
$$ab = ba, \qquad (ab)c = a(bc), \qquad a(b + c) = ab + ac, \qquad 1 . a = a;$$

hieraan voegen zich nog toe de grondeigenschappen betreffende de mogelijkheid van de aftrekking van 0 en van de deeling op 1, mits niet door 0, dus de oplosbaarheid der vergelijkingen:

$$a + x = 0, \qquad bx = 1 \ (b \neq 0).$$

Bij de reëele getallen komen hier nog eenige grondeigenschappen betreffende grooter en kleiner bij, zooals de transitiviteit van grooter (is $a > b$ en $b > c$, dan is $a > c$), de eigenschap, dat uit $a > b$ volgt $a + c > b + c$, en het positief zijn van het product van twee positieve getallen. Deze op grooter betrekking hebbende eigenschappen wensch ik hier verder buiten beschouwing te laten.

Uit de grondeigenschappen volgen de zoogenaamde afgeleide eigenschappen. Daartoe behooren de voor de hand liggende uitbreidingen van de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen, die ik hier stilzwijgend voorbij ga, maar ook de eigenschap, dat de vergelijking $a+x=a'$ steeds één en slechts één oplossing heeft, nl. $x = a' + (-a)$ (waarin $-a$ een oplossing is van $a + x = 0$), en dat ook de vergelijking $bx = b'$ $(b \neq 0)$ één en slechts één oplossing heeft, nl. $x = b' \cdot \frac{1}{b}$ (waarin $\frac{1}{b}$ een oplossing is van $bx=1$). Laatstgenoemde eigenschappen drukken uit, dat iedere aftrekking en iedere deeling (mits niet door 0) mogelijk en ondubbelzinnig is.

Tot de iets minder voor de hand liggende afgeleide eigenschappen behoort ook, dat $0 . a = 0$ is en dat uit $ab = 0$ volgt, dat $a = 0$ of $b = 0$ is. De eerste dier beide eigenschappen leidt men aldus uit de grondeigenschappen af:

$$0 . a = 0 . a + 0 = 0 . a + \{a + (-a)\} = (0 . a + a) + (-a) =$$
$$= (0 . a + 1 . a) + (-a) = (0 + 1)a + (-a) = 1 . a + (-a) = a + (-a) = 0.$$

Dat uit $ab = 0$ volgt $a = 0$ of $b = 0$, kan ook zoo geformuleerd worden, dat uit $ab = 0$ en $a \neq 0$ volgt $b = 0$. Het bewijs is (gebruik makend van de vorige eigenschap) aldus:

$$b = 1 . b = \left(\frac{1}{a} . a\right) b = \frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} . 0 = 0.$$

Deze bewijzen kunnen nog iets korter worden neergeschreven, als eerst de ondubbelzinnigheid van iedere aftrekking en van iedere deeling, mits niet door 0, is aangetoond.

Daar uit de grondeigenschappen is afgeleid, dat $0 . a = 0$ is, kan men, met behoud dier grondeigenschappen, geen getal invoeren, dat aan de vergelijking $0 . x = 1$ voldoet; het eerste lid is nl. steeds 0, dus nooit gelijk aan het tweede lid. Hierbij beroept men zich op $0 \neq 1$, hetgeen men onder de grondeigenschappen heeft op te

nemen, zoo men de relatie grooter buiten beschouwing laat. Men kan deze grondeigenschap ook zoo uitspreken, dat er ongelijke getallen bestaan; was nl. $0 = 1$, dan had men $a = 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0$, zoodat dan ieder getal gelijk zou zijn aan 0.

2. Onmogelijkheid van de deeling door nul. Uit het omtrent de vergelijking $0 \cdot x = 1$ gevondene blijkt, dat men geen getal $\frac{1}{0}$ kan invoeren, zonder in conflict te komen met de grondeigenschappen; uit die grondeigenschappen volgt nl., dat $0 \cdot \frac{1}{0} = 0$ en niet $= 1$ zou zijn. *Van een zoodanige invoering van een getal* ∞, *dat de rekenregels behouden blijven, moet dus worden afgezien.* Zoo men dus al het begrip oneindig invoert, dient dit in elk geval zoo te geschieden, *dat men daarmede niet op de gebruikelijke wijze rekent.* Men kan dus zeggen, dat de invoering van ∞ eenvoudig als $\frac{1}{0}$ mislukt. Waren er dus geen andere dingen, die in de richting van het oneindig groote wijzen, dan zou men van de invoering van dit begrip hebben af te zien.

In verband met het voorgaande staat, *dat deeling door 0 niet zonder meer kan worden toegelaten,* zoodat men steeds, zoodra een getal in den noemer verschijnt, rekening moet houden met de mogelijkheid, dat dit getal 0 is, in welk geval een ontoelaatbare omzetting heeft plaats gehad. Hierop kan in het elementaire wiskunde-onderwijs met niet genoeg nadruk gewezen worden; ik ben van meening, dat hierop zoolang gehamerd behoort te worden, dat de leerlingen daar niet meer tegen zondigen kunnen.

3. Geval, waarin een nul in den noemer mag worden toegelaten. In bepaalde gevallen evenwel kan een 0 in den noemer zonder bezwaar worden toegelaten, zoo men er zich slechts nauwkeurig rekenschap van geeft, wat met het neergeschrevene bedoeld wordt. Zoo is er b.v. geen bezwaar tegen, en is het zelfs voordeelig, de oplossing van het stelsel homogene lineaire vergelijkingen

$$x + y - 3z = 0, \qquad 2x + y - 3z = 0$$

in den vorm $\frac{x}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ neer te schrijven, mits men slechts weet, dat dit beteekent, dat alle oplossingen van het stelsel vervat zijn in:

$$x = 0 \cdot t, \qquad y = 3t, \qquad z = 1 \cdot t.$$

Algemeener heeft het toelaten van 0 in den noemer het voordeel, dat men de oplossingen van het *stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i,n+1}x_{n+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

met n onbekenden in den eenvoudigen vorm

$$\frac{x_1}{D_1} = -\frac{x_2}{D_2} = \frac{x_3}{D_3} = \ldots = (-1)^n \frac{x_{n+1}}{D_{n+1}}$$

kan schrijven, waarbij D_j de determinant is, die uit de matrix

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1,n+1} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \; a_{n2} \ldots a_{n,n+1} \end{Vmatrix}$$

ontstaat door de j^{de} kolom te schrappen. Hierbij mogen gerust sommige der getallen $D_1, D_2 \ldots, D_{n+1}$ nul zijn, mits ze slechts niet alle nul zijn. De nullen in den noemer hebben nu feitelijk niets met deelen door 0 te maken, daar men slechts bedoelt, dat

$$x_j = (-1)^{j-1} D_j t \quad (j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

met willekeurig waarde van t, de algemeene oplossing van het stelsel is.

4. Oneindige verzamelingen; cardinaalgetallen en ordinaalgetallen. Zonder dat de een of andere rekening tot een 0 in den noemer voert, komt men tot het oneindigheidsbegrip bij oneindige verzamelingen, d.w.z. bij *verzamelingen, die uit oneindig veel elementen bestaan.* Hiermede wordt dan bedoeld, dat de verzameling voor geen enkel natuurlijk getal n op de verzameling der natuurlijke getallen tot en met n is af te beelden; d.w.z. dat het niet mogelijk is tusschen de elementen van beide verzamelingen een één-éénduidige correspondentie vast te leggen. Voor ieder natuurlijk getal n zijn er dan nog elementen der verzameling over, nadat men daaruit n elementen heeft verwijderd. Het eenvoudigste voorbeeld van zulk een oneindige verzameling is de verzameling der natuurlijke getallen; andere voorbeelden zijn de verzameling der even natuurlijke getallen, die der priemgetallen, die der priemgetallen van den vorm $3\nu + 1$, die der meetbare getallen, die der reëele getallen, enz.

De oneindige verzamelingen hebben gevoerd tot de door G. Cantor opgestelde leer der transfiniete cardinaalgetallen of de leer der *machtigheden.* Hierbij wordt onder een *cardinaalgetal* verstaan *een symbool, dat toegekend wordt aan alle onderling gelijk-*

waardige verzamelingen, dus een symbool, waardoor een verzameling van een daarmede niet-gelijkwaardige onderscheiden wordt; onder *gelijkwaardige* verzamelingen verstaat men verzamelingen, die op elkaar kunnen worden afgebeeld, dus die met elkaar in een (1,1)-correspondentie kunnen worden gebracht.

Bij cardinaalgetallen wordt een grooter-relatie en een optelling, vermenigvuldiging en machtsverheffing gedefinieerd, terwijl de regels worden afgeleid, waaraan de cardinaalgetallen daarbij onderworpen zijn, regels, die bij eindige cardinaalgetallen tot de gewone rekenregels voeren, maar bij oneindige cardinaalgetallen daarvan in sommige opzichten verschillen. Het kleinste oneindige of transfiniete cadinaalgetal, d.w.z. cardinaalgetal van een oneindige verzameling, is het cardinaalgetal van de verzameling der natuurlijke getallen, dat *aftelbaar oneindig* genoemd wordt. Een verzameling, waaraan dit cardinaalgetal toekomt, heet eveneens aftelbaar oneindig, waarmede dus afbeeldbaarheid op de verzameling der natuurlijke getallen bedoeld is.

Naast de cardinaalgetallen staan de *transfiniete ordinaalgetallen,* die als rangnummers van een geordende verzameling optreden. De eigenschappen daarvan zijn van die der transfiniete cardinaalgetallen verschillend.

Deze oneindigheidsbegrippen zijn zeker in het elementaire wiskunde-onderwijs niet op hun plaats.

5. Het begrip ∞^k en het dimensiebegrip. Bij een oneindige verzameling doet zich vaak het geval voor, *dat de elementen der verzameling in continu verband te brengen zijn met de reëele getallen of met de paren reëele getallen of met de drietallen reëele getallen, enz.* Men zegt dan, *dat de verzameling resp. uit* ∞^1, ∞^2, ∞^3, *enz. elementen bestaat.*

Vooral bij meetkundige quaesties is dit een veel voorkomend iets. Zoo zegt men, dat in een plat vlak ∞^2 punten liggen, waarmede niets anders bedoeld is dan, dat de plaats van het punt is aangewezen door 2 getallen, waarvoor men b.v. de rechthoekige of scheefhoekige Cartesiaansche coördinaten kan nemen. Dat de verzameling der punten op deze wijze continu is afgebeeld op die der paren reëele getallen, beteekent ruw gezegd, dat een kleine verandering dier getallen een kleine verplaatsing van het punt ten gevolge heeft en omgekeerd.

Andere voorbeelden zijn, dat in een plat vlak ∞^6 driehoeken liggen, dat in de ruimte ∞^4 rechten liggen, dat er ∞^3 driehoeken zijn, zoo men gelijk en gelijkvormige driehoeken als dezelfde beschouwt, enz.

Met deze oneindigheidssymbolen kan men op bepaalde wijze rekenen. Heeft men b.v. een verzameling V van ∞^p elementen en is ieder dier elementen weer een verzameling van ∞^q elementen, dan heeft men in het geheel ∞^{p+q} van laatstgenoemde elementen, hetgeen als $\infty^p . \infty^q = \infty^{p+q}$ te schrijven is; hierbij wordt ondersteld, dat twee elementen der verzameling V verzamelingen zonder gemeenschappelijke elementen zijn.

Vanuit het standpunt van de leer der cardinaalgetallen zijn de oneindigheidssymbolen ∞^1, ∞^2, ∞^3, enz. gelijk; d.w.z. een verzameling van b.v. ∞^2 elementen is af te beelden op een verzameling, die uit ∞^3 elementen bestaat. Die afbeelding is echter niet continu. Wil men aan het symbool ∞^k een scherpe beteekenis toekennen, dan behoort te worden aangetoond, *dat een verzameling van* ∞^k *elementen, niet continu is af te beelden op een verzameling van* ∞^l *elementen, als* $k \neq l$ is, hetgeen dan beteekent, dat de verzameling, die tot elementen heeft de k-tallen reëele getallen (lettend op de volgorde dier getallen), niet continu is af te beelden op de verzameling der l-tallen reëele getallen.

De onmogelijkheid van zulk een afbeelding, waarop de vorming van het begrip *dimensie* berust, is door BROUWER aangetoond. Eerst door de onderzoekingen van BROUWER heeft dus het van ouds bekende dimensiebegrip een geheel scherpe begrenzing gekregen.

Het wil mij voorkomen, dat de begrippen ∞^1, ∞^2, ∞^3, enz. zeer goed in het elementaire onderwijs kunnen worden ingevoerd, natuurlijk zonder daarbij over de continuïteit der afbeelding te spreken en zonder over de genoemde door BROUWER tot oplossing gebrachte moeilijkheid te spreken. De eisch der continuïteit wordt door de leerlingen als een vanzelf-sprekendheid aangevoeld, zonder dat hun daarover iets gezegd wordt, maar dan ook zonder dat zij zich daarvan rekenschap geven. De docent kan volstaan met op te merken, dat met b.v. ∞^4 figuren bedoeld is, dat de figuur door 4 getallen is vastgelegd. Ook $\infty^2 . \infty^4 = \infty^6$ zal voor de leerlingen geen moeilijkheid opleveren, indien zooiets zich bij bepaalde voorbeelden voordoet. Het symbool ∞^4 drukt op eenvoudige en over-

zichtelijke wijze een begrip uit, waarmede de leerlingen geen moeite hebben, doordat ze de daaraan verbonden moeilijkheden niet zien. Intusschen heb ik met het voorgaande niet willen zeggen, dat dit oneindigheidsbegrip op de middelbare scholen behoort te worden ingevoerd, maar slechts, dat tegen een aanroering van dit begrip geen bezwaar bestaat, zoo een of ander vraagstuk daartoe eens aanleiding geeft.

6. Oneindig in de moderne integraalrekening. Een ander gebied, waar het oneindige een rol speelt, zonder dat dit met een limietquaestie in verband staat, is de *moderne integraalrekening,* waar de theorie der enkelvoudige of meervoudige bepaalde integralen op het *maatbegrip* gebaseerd is. Als voorbeeld nemen we een reëele functie z van twee reëele veranderlijken x en y. Die functie wordt beschouwd voor een zekere verzameling V van in een plat vlak gelegen punten (x, y). Is bij zulk een punt de bijbehoorende waarde van z niet 0, dan voegt men daaraan toe een lijnsegment door dit punt, dat loodrecht op het xy-vlak staat en waarvan het eindpunt door de waarde van z wordt aangewezen. Dit lijnsegment, dat *ordinaat* genoemd wordt, ligt aan den positieven of aan den negatieven kant van het xy-vlak, al naar gelang z positief of negatief is.

Door de verzameling der ordinaten krijgt men zoo in de ruimte een puntverzameling aan den positieven kant en een puntverzameling aan den negatieven kant van het xy-vlak. Heeft ieder dier puntverzamelingen een *maat,* zooals die in de maattheorie gedefinieerd wordt, dan wordt de bepaalde (in ons voorbeeld 2-voudige) integraal als het verschil dier maten gedefinieerd.

Bij deze theorie kunnen *oneindig groote functiewaarden* worden toegelaten, waarbij onderscheid te maken is tusschen $+\infty$ en $-\infty$. Is de functiewaarde $+\infty$, dan moet men van de door het punt (x, y) gaande rechte loodrecht op het xy-vlak het geheele aan den positieven kant van het xy-vlak gelegen stuk nemen; is de functiewaarde $-\infty$, dan moet men van genoemde rechte het aan den negatieven kant van het xy-vlak gelegen deel nemen. Ik behoef niet te zeggen, dat dit oneindigheidsbegrip bij het elementaire onderwijs geen rol speelt.

7. Oneindig in de functietheorie. Hetzelfde geldt voor het oneindigheidsbegrip, dat optreedt in de theorie der *analytische*

functies van een complexe veranderlijke z. Daar wordt het stelsel der complexe getallen z uitgebreid door daaraan één enkel getal oneindig groot toe te voegen. Beeldt men de complexe getallen op de bekende wijze op een plat vlak af en brengt men de punten van dit vlak door stereographische projectie over op een bol-oppervlak, dat in den oorsprong aan het platte vlak raakt, dan correspondeert met ieder complex getal één punt van het bol-oppervlak. Omgekeerd correspondeert met ieder punt van het bol-oppervlak een complex getal z, behalve met het diametraal tegenover den oorsprong gelegen punt. Met dit uitzonderingspunt laat men nu het getal ∞ correspondeeren.

Ook bij de complexe functiewaarden kan men zulk een getal ∞ invoeren. Op de gewone wijze gerekend wordt er echter met deze oneindig groote getallen niet.

8. **Elementen in het oneindige in de gewone meetkunde.** Ik kom nu tot het oneindige, zooals dit in de meetkunde wordt ingevoerd om allerlei stellingen een eenvoudigere, elegantere en algemeenere formuleering te geven. Daarbij zal ik mij tot de driemensionale meetkunde bepalen.

Vooreerst wordt aan iedere rechte één en slechts één *punt in het oneindige* toegekend, in dier voege, dat men aan evenwijdige rechten hetzelfde punt in het oneindige toekent. Men moet er geheel van afzien zich van het oneindige een voorstelling te maken, maar in die punten in het oneindige slechts een terminologie zien, waardoor men op eenvoudige wijze dingen zeggen kan, die op omslachtiger wijze ook zonder invoering van oneindig verre punten te zeggen zijn. De uitdrukking, dat twee rechten hetzelfde punt in het oneindige hebben, beteekent niets anders dan, dat ze dezelfde richting hebben, waardoor dus een punt in het oneindige niets anders wordt dan een richting.

Door invoering der punten in het oneindige komt het verschil tusschen snijding en evenwijdigheid weg te vallen, wat bij verschillende stellingen, zooals b.v. die van DESARGUES en PASCAL, een wegvallen van uitzonderingen meebrengt, waardoor de formuleering der stellingen veel vereenvoudigd en tevens de draagwijdte daarvan uitgebreid wordt.

Zoo kan men reeds aanstonds zonder uitzondering volhouden, dat twee verschillende rechten, die in een zelfde plat vlak liggen,

één en slechts één punt gemeen hebben. Drukt men dit zoo uit, dat twee verschillende rechten, die met een zelfde vlak incident zijn, ook met een zelfde punt incident zijn en omgekeerd, dan ziet men de *dualiteit* verschijnen, die er *in de ruimte tusschen punt en vlak* bestaat. In de planimetrie krijgt men door de invoering der oneindig verre punten, dat niet alleen met ieder tweetal verschillende punten één rechte incident is, maar ook, dat met ieder tweetal verschillende rechten één punt incident is, waardoor men in de planimetrie een *dualiteit tusschen punten en rechten* waarneemt.

Deze dualiteit in de ruimte en dualiteit in het platte vlak lijken mij uiterst leerzaam. Het komt mij voor, dat hiervan bij het elementaire wiskunde-onderwijs zeer goed iets is mede te deelen, zonder dat het boven het gemiddelde bevattingsvermogen der leerlingen gaat. Die dualiteit is zoo verrassend, dat deze zeer zeker de belangstelling der leerlingen zal hebben.

Zonder punten in het oneindige is echter zulk een dualiteit niet aanwezig. Daarvoor is ook nog noodig aan ieder plat vlak een *rechte in het oneindige* toe te kennen, die de meetkundige plaats is van de punten in het oneindige der in het vlak gelegen rechten en ook gelegen is in alle vlakken, die aan het beschouwde vlak evenwijdig zijn. Verder moet dan nog aan de ruimte een *plat vlak in het oneindige* worden toegevoegd, dat de meetkundige plaats is der punten in het oneindige van alle mogelijke rechten.

Terloops vestig ik nog de aandacht op het verschil in opvatting van het oneindige van een plat vlak in de gewone meetkunde en bij de afbeelding der complexe getallen op een plat vlak ten behoeve van de functietheorie. Bij allerlei *meetkundige beschouwingen* wordt het oneindige van een plat vlak als een *rechte* opgevat, terwijl dit in de *functietheorie* als een *punt* wordt behandeld (waarom dan ook de afbeelding der complexe getallen op een bolppervlak, waar $z = \infty$ het diametraal tegenover het punt $z = 0$ gelegen punt is, te verkiezen is). Of dus het oneindige van een plat vlak een rechte of een punt te noemen is, hangt van omstandigheden af, dus van de bedoeling, die men met het invoeren van het oneindige heeft.

Het invlechten der in het oneindige gelegen elementen, ook wel *oneigenlijke elementen* genoemd, in het elementaire onderwijs lijkt mij voor de planimetrie meer aangewezen dan voor de stereometrie, daar er in de planimetrie meer gelegenheid is het groote nut

daarvan door eenvoudige voorbeelden toe te lichten. Ik wijs in dit verband op de stelling van DESARGUES omtrent twee perspectieve driehoeken.. Deze stelling is op zeer duidelijke wijze aan te toonen door een viervlak te snijden met een plat vlak en de 4 snijlijnen met de zijvlakken van het viervlak in teekening te brengen; door de zoo verkregen uit 10 lijnen bestaande figuur planimetrisch te interpreteeren, springt onmiddellijk de juistheid der stelling van DESARGUES in het oog. Wil men den volledigen inhoud dier belangrijke stelling weergeven zonder elementen in het oneindige in te voeren, dan krijgt men een zoo ingewikkelde en weinig overzichtelijke formuleering, dat daardoor het hanteeren der stelling, ook in allerlei bijzondere gevallen, haast onmogelijk wordt.

Ik wijs er verder nog op, dat het over één kam scheren van punten in het eindige en punten in het oneindige in de geheele *projectieve meetkunde* een besliste noodzakelijkheid is. Daar geschiedt dit over één kam scheren zoo grondig, dat het onderscheid niet eens gemaakt wordt en kortweg van punten gesproken wordt. Uit de axioma's, waarop de projectieve meetkunde wordt opgetrokken, blijkt dan, dat die punten zoowel in het eindige als in het oneindige kunnen liggen, een opmerking overigens, die in de projectieve meetkunde zelf niet thuis behoort.

9. Elementen in het oneindige in de analytische meetkunde. In de *analytische meetkunde* worden de elementen in het oneindige op zeer eenvoudige wijze ingevoerd door aan de Cartesiaansche coördinaten (x en y in het platte vlak en x, y en z in de ruimte) nog een *homogeniteitsfactor* t toe te voegen, die bij alle in het eindige gelegen punten als 1 genomen kan worden, maar die door 0-stelling de punten in het oneindige levert. Alles wat op oneigenlijke elementen betrekking heeft, komt zoo op ongezochte wijze voor den dag.

Op nog frappanter wijze komt het wegvallen van het verschil tusschen in het eindige en in het oneindige gelegen punten voor den dag door in het platte vlak *driehoekscoördinaten* in te voeren, waarbij een willekeurige driehoek (gevormd door 3 in het eindige of in het oneindige gelegen punten, die niet op een zelfde rechte liggen) als coördinatendriehoek wordt ingevoerd.

Zonder die driehoekscoördinaten te bespreken, kan zeer goed het analoge geval op een rechte behandeld worden. Hierbij worden op die rechte twee vaste punten A en B aangenomen (die dezelfde

rol spelen als in het platte vlak de drie hoekpunten van den coördinatendriehoek), terwijl de plaats van een willekeurig ander punt dier rechte kan worden aangewezen door de verhouding der van teekens voorziene afstanden x en y tot de vaste punten. Bij iedere waarde dier verhouding behoort een punt der rechte, behalve bij de verhouding 1; aan die verhouding wordt nu het punt in het oneindige der rechte toegevoegd. Ook dit is iets, dat in het elementaire meetkunde-onderwijs onder te brengen zou zijn, b.v. bij de stellingen van MENELAUS en DE CEVA.

Onder de waarden der verhouding $x : y$, die de ligging van het punt ten opzichte van de vaste punten A en B aanwijst, kan men ook het getal ∞ opnemen, welk getal dan met het punt B correspondeert. Men kan hier de verhouding ∞ vermijden door de plaats van een punt aan te wijzen door 2 getallen ξ en η, die zich als de afstanden x en y verhouden; voor $\xi = 0$ krijgt men het punt A, voor $\eta = 0$ het punt B.

Een geheel soortgelijk iets doet zich voor, als de coördinaten van een punt van een *rationale kromme* als rationale functies van een parameter t geschreven worden; daarbij correspondeeren de punten in het oneindige der kromme met bepaalde waarden van t, terwijl $t = \infty$ een bepaald punt der kromme aanwijst. Men kan de oneindig groote waarde van den parameter weer vermijden door $t = u : v$ te stellen, waardoor de homogene coördinaten van een punt der kromme homogene veeltermen van denzelfden graad in u en v worden.

10. Oneigenlijke elementen in verband met de perspectief. Een zeer overzichtelijk middel om de overeenstemming van in het eindige en in het oneindige gelegen punten ten aanzien van bepaalde, zoogenaamde *projectieve,* eigenschappen te demonstreeren, levert de *perspectief,* waarbij ook de in het oneindige gelegen punten en rechten hun afbeelding krijgen. Door die afbeelding is de ligging van het oorspronkelijke punt of van de oorspronkelijke rechte aangewezen, zoo men zich tot in een gegeven plat vlak gelegen punten en rechten beperkt. De verschillende punten in het oneindige van dit vlak leveren beeldpunten, die gelegen zijn op een bepaalde rechte van het tafereel, de zoogenaamde *vluchtlijn,* die de afbeelding is van de lijn in het oneindige van het beschouwde vlak.

Geeft men aan het beeld van een in het oneindige gelegen punt

een kleine verplaatsing, waardoor het niet meer op de vluchtlijn komt te liggen, dan krijgt men het beeld van een ver weg gelegen punt. Dit ver weg gelegen punt vertrekt naar het oneindige, als het beeldpunt tot een punt van de vluchtlijn nadert.

Deze beschouwing, die veel bijdraagt tot het verkrijgen van een duidelijk inzicht in oneindig ver gelegen punten, zooals b.v. bij de *in het oneindige gelegen singulariteiten van een vlakke kromme,* wekt het denkbeeld, dat die oneindig ver gelegen punten zijn op te vatten als *limietstanden van in het eindige gelegen punten,* die zich steeds verder en verder verwijderen, dus dat men in de invoering der oneindig ver gelegen elementen een limietquaestie heeft te zien. Deze limietquaestie is echter geenszins primair. De oneindig verre elementen behooren buiten iedere limietbeschouwing om te worden ingevoerd. Na die invoering kan men ze met limietbeschouwingen in verband brengen, evenals dit ook bij in het eindige gelegen elementen mogelijk is; ik heb hier slechts te wijzen op de raaklijn van een kromme in een punt P als limietstand der verbindingslijn van P met een tot P naderend punt Q der kromme.

11. Oneindig groote wortels van een hoogere-machtsvergelijking. In nauw verband met de in het oneindige gelegen punten staan de *oneindig groote wortels van de hoogere-machtsvergelijking*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

als A_0, en mogelijk ook een of meer der volgende coëfficiënten, de waarde 0 aannemen. Is b.v. $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ en $A_3 \neq 0$, dan wordt de vergelijking geacht 3 oneindige groote wortels (dus een 3-voudigen wortel ∞) te bezitten. Dit staat weer in het nauwste verband met de in den aanvang van mijn voordracht besproken invoering van het getal ∞ om de deeling door 0 mogelijk te maken. Voor $n = 1$ gaat nl. de bovengenoemde vergelijking over in $A_0x + A_1 = 0$, welke vergelijking voor $A_0 \neq 0$ den wortel $\frac{A_1}{A_0}$ heeft. Is $A_0 = 0$ en $A_1 \neq 0$, dan kent men aan die vergelijking een wortel ∞ toe.

Men kan de oneindig groote wortels der hoogere machtsvergelijking voor den dag brengen door x te vervangen door de verhouding $y : z$, waardoor de vergelijking wordt:

$$A_0y^n + A_1y^{n-1}z + A_2y^{n-2}z^2 + \dots + A_{n-1}yz^{n-1} + A_nz^n = 0.$$

Is nu b.v. $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ en $A_3 \neq 0$, dan heeft de vergelijking

3 wortels $z = 0$, die als 3 oneindig groote wortels $y : z$ te interpreteeren zijn.

Men laat natuurlijk het geval $A_0 = 0$ alleen toe, als de vergelijking optreedt in een bijzonder geval van een algemeener vraagstuk, waarbij $A_0 \neq 0$ is. Snijdt men b.v. een vlakke kromme van den $n$den graad met de rechte $y = mx + k$, dan krijgt men bij een willekeurige waarde van m een vergelijking van den $n$den graad ter bepaling van de abscissen x der snijpunten. Bij bepaalde waarden van m wordt de coëfficiënt van x^n nul en krijgt men minder dan n snijpunten. Men zegt dan, *dat de ontbrekende snijpunten in het oneindige liggen*. De snijlijn is dan een *lijn in asymptotische richting*.

Evenwel kunnen oneindig groote wortels van een hoogere machtsvergelijking ook optreden bij meetkundige toepassingen, waarbij er geen sprake is van in het oneindige gelegen elementen. Zijn b.v.

$$A_0x^k + A_1x^{k-1}y + A_2x^{k-2}y^2 + \dots + A_{k-1}xy^{k-1} + A_ky^k$$

de termen van den laagsten graad, voorkomende in het eerste lid der vergelijking van een kromme van den $n$den graad, dan geeft een door $y = mx$ voorgestelde rechte in het algemeen k, en niet meer, in den oorsprong O vallende snijpunten, zoodat O een *k-voudig* punt der kromme is. De vergelijking ter bepaling van de abscissen der snijpunten geeft echter meer dan k wortels 0, als m voldoet aan:

$$A_0 + A_1m + A_2m^2 + \dots + A_{k-1}m^{k-1} + A_km^k = 0.$$

Uit deze vergelijking vindt men de richtingscoëfficiënten der k raaklijnen in het k-voudige punt O. Is nu b.v. $A_k = 0$, $A_{k-1} \neq 0$, dan heeft de vergelijking in m één oneindig grooten wortel, hetgeen beteekent, dat de y-as éénmaal tot de k raaklijnen in O behoort.

Men kan nu wel tegenwerpen, dat men de zaak zoo moet voorstellen, dat men door $y = mx$ iedere door O gaande rechte kan voorstellen, behalve de y-as, en dat dus de vergelijking in m alleen de richtingscoëffiënten der van de y-as verschillende raaklijnen in O levert, zoodat afzonderlijk onderzocht moet worden of soms de y-as raaklijn in O is. Men komt dan tot hetzelfde resultaat als boven, nl. dat de y-as dan en alleen dan raaklijn in O is, als $A_k = 0$ is.

Het is echter volstrekt niet voordeelig die oneindig groote wortels uit te sluiten, al spreekt het van zelf, dat men de zaak ook zonder invoering van het begrip oneindig groote wortels behandelen kan. De invoering van dit begrip is dan ook geen noodzakelijkheid (evenmin als het noodzakelijk is negatieve of gebroken exponenten in te

voeren), maar slechts een wenschelijkheid ten einde vereenvoudiging te verkrijgen en het moeten onderscheiden van verschillende gevallen te vermijden. Wil men de resultaten betreffende oneindig groote wortels motiveeren, dan kan dit eens en vooral met vermijding van het oneindig groote geschieden, maar het is niet gewenscht dit vermijden in ieder voorkomend geval als eisch te stellen.

12. Verband tusschen oneindig groote wortels en limieten. Ook de quaestie van oneindig groote wortels van een hoogere machtsvergelijking kan men met limietbeschouwingen in verband brengen. Evenals bij de oneindig verre elementen der meetkunde wil dit dan geenszins zeggen, dat het invoeren van het oneindige zijn recht van bestaan aan die limietbeschouwingen ontleent. Die limietbeschouwingen geven slechts een, overigens zeer gewenschte, verduidelijking van het oneindige, waardoor de gemaakte afspraken meer voor de hand liggend en daardoor aannemelijker worden. Hun recht van bestaan echter ontleenen die afspraken, behalve aan de vereenvoudiging, die zij geven, daaraan, dat ze tot geen tegenstrijdigheden kunnen voeren. Zulke tegenstrijdigheden zijn uitgesloten, zoo men slechts met de ingevoerde begrippen geen andere bewerkingen uitvoert dan die, waarvan de juistheid uitdrukkelijk bewezen is, dus zoo men slechts nalaat zonder bewijs te generaliseeren, dus nalaat dingen, die voor eindige getallen gelden, zonder meer op de ingevoerde oneindig groote getallen toe te passen.

Tusschen oneindig groote wortels en limietbeschouwingen kan men verband leggen door den coëfficiënt A_0 der hoogere-machtsvergelijking (en eventueel ook een of meer der volgende coëfficiënten) onbepaald tot 0 te laten naderen en na te gaan wat er met de wortels gebeurt. Daartoe stellen we $x = \frac{1}{w}$, waardoor men de vergelijking

$$A_n w^n + A_{n-1} w^{n-1} + A_{n-1} w^{n-2} + \ldots + A_1 w + A_0 = 0$$

op de reciproke wortels krijgt. Deze heeft voor $A_0 = 0$ een of meer wortels nul. Men beroept zich nu op de (overigens niet zoo gemakkelijk te bewijzen) stelling, dat de wortels van een hoogere-machtsvergelijking continue functies zijn van de coëfficiënten [1]. Laat men A_0 onbepaald tot 0 naderen, dan zullen, als b.v. ook A_1 en A_2 tot 0

---

[1]) Zie b.v. SCHUH, Lessen over de Hoogere Algebra I, § 275 en 276.

naderen, maar A_3 niet, 3 wortels der vergelijking in w onbepaald tot 0 naderen, dus 0 tot limiet hebben. Voor 3 der wortels van de oorspronkelijke vergelijking in x zal dus $\frac{1}{x}$ tot 0 naderen, hetgeen beteekent, dat 3 der wortels x in absolute waarde onbepaald toenemen. Er is dus alle aanleiding te zeggen, dat deze wortels oneindig groot geworden zijn, als ze feitelijk verdwenen zijn doordat $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ geworden is.

De oneindig groote wortels van een hoogere-machtsvergelijking kunnen natuurlijk bij het elementaire wiskunde-onderwijs geen plaats vinden, noch zonder, noch met limietbeschouwingen.

13. Het oneindige in de theorie der oneigenlijke bepaalde integralen. Reeds eenige malen is het verband tusschen oneindig groot en limiet ter sprake gekomen. In nog andere gevallen treedt in de wiskunde het oneindige in dit verband op, zooals bij de *orde van het oneindig groot worden* in de theorie der *oneigenlijke bepaalde integralen.* Heeft men b.v. de integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (a < b)$$

en wordt de integrand $f(x)$ voor $x = a$ *oneindig van de* k^{de} *orde,* dan beteekent dit niets anders dan, dat

$$\lim_{x=a} (x - a)^k f(x)$$

bestaat (als eigenlijke of eindige limiet) en van 0 verschilt. Iets algemeener kan men, als $f(x)$ positief is, oneindig worden van de k^{de} orde zoo definieeren, dat er twee zoodanige positieve getallen A en B en een getal a', dat grooter dan a is, bestaan, dat voor alle tusschen a en a' gelegen waarden van x aan

$$A < (x-a)^k f(x) < B$$

voldaan is. De integraal is dan convergent of divergent, al naar gelang $k < 1$ of $k \geqq 1$ is.

Op dit oneindigheidsbegrip, alsmede op het nauw daarmede in verband staande begrip *nul worden van een zekere orde,* dat bij *oneindig voortloopende reeksen* en bij *oneigenlijke bepaalde integralen met een oneindig groot integratie-interval* optreedt, ga ik verder niet in, als geheel staande buiten de schoolwiskunde.

14. Het oneindige bij het oplossen van vergelijkingen. In de schoolwiskunde treedt het oneindige in verreweg de meeste gevallen zoodanig op, dat het in verband te brengen is met limietquaesties, inzonderheid bij het *oplossen van vergelijkingen, waarvan eenige termen oneindig groot kunnen worden.* Eenvoudigheidshalve beperk ik mij tot één vergelijking met één onbekende x, een beperking, die we gerust kunnen maken, waar het alleen de bespreking geldt van het standpunt, waarop men zich daarbij kan stellen. Men kan daarbij aannemen, dat de vergelijking op 0 herleid is, dus van den vorm

$$f(x) = 0$$

is. Voor iedere waarde van x, die in $g(x) = h(x)$ gesubstitueerd kan worden, komt nl. de bewering $g(x) = h(x)$ op hetzelfde neer als $g(x) - h(x) = 0$.

Men kan nu het standpunt innemen, dat $x = a$ dan en alleen dan als een wortel van $f(x) = 0$ te aanvaarden is, *als $x = a$ in $f(x)$ gesubstitueerd kan worden en die substitutie als functiewaarde 0 oplevert.* Een ander standpunt is, dat $x = a$ ook dan als een wortel te beschouwen is, *als $x = a$ zonder meer niet te substitueeren is,* dus $f(a)$ geen zin heeft, *maar $f(x)$ de limietwaarde 0 heeft, als x onbepaald tot a nadert,* dus als men heeft:

$$\lim_{x=a} f(x) = 0;$$

men zou dan b.v. het geval kunnen hebben, dat bij de oorspronkelijke vergelijking $g(x) = h(x)$ beide leden onbepaald toenemen, als men x tot a laat naderen.

Beide standpunten, die ik (zonder daarmede een appreciatie uit te drukken) het *enge* en het *ruime* standpunt wil noemen, hebben hun verdedigers. Welk standpunt het meest aan te bevelen is, is zonder meer niet te zeggen. Het zal toch van de herkomst der vergelijking kunnen afhangen of een getal a, dat zich niet substitueeren laat, maar waarvoor $\lim_{x=a} f(x) = 0$ is, als een wortel te aanvaarden is, evenals het bij het oplossen van een vierkantsvergelijking, die zich bij een bepaald vraagstuk heeft voorgedaan, kan voorkomen, dat men alleen de reëele, of alleen de positieve, of alleen de geheele wortels kan gebruiken. Het vraagstuk, dat tot de vierkantsvergelijking aanleiding gegeven heeft, moet dan daaromtrent uitsluitsel geven.

Bij het enge standpunt wordt ten aanzien van het oplossen der

vergelijking $f(x) = 0$ het oneindige volledig uitgeschakeld en onder geen omstandigheid een nul in den noemer toegelaten. Formeel is dit standpunt volkomen in orde en als men steeds op nullen in den noemer bedacht is en daarop steeds let bij het beoordeelen van de toelaatbaarheid van herleidingen, zal men gevrijwaard zijn van het maken van fouten, die anders maar al te licht gemaakt kunnen worden.

Aan den anderen kant echter zal men bij het enge standpunt vaak oplossingen uitsluiten, die bij het oorspronkelijke (b.v. meetkundige of mechanische) vraagstuk zeer zeker aan de vraag voldoen. Men kan dan natuurlijk tegenwerpen, dat in een zoodanig geval het meetkundige of mechanische vraagstuk niet op juiste wijze in vergelijking gebracht is, of liever, dat bij dit in vergelijking brengen een of meer bijzondere gevallen over het hoofd gezien zijn, die afzonderlijk dienen te worden bekeken. Als regel voert dan zulk een bijzonder geval tot een getal, dat bij het enge standpunt niet, maar bij het ruime standpunt wel een wortel der vergelijking is.

Bij het enge standpunt zal men dus ook alle oplossingen van het oorspronkelijke vraagstuk kunnen krijgen, maar vaak niet dan na verschillende gevallen onderscheiden te hebben. In verscheidene vraagstukken is het maken van zulk een onderscheiding onvermijdelijk, maar zoo zulk een onderscheiding vermeden kan worden door het ruime standpunt in te nemen, is dit verkieselijk te achten. Ongetwijfeld zal men de meeste kans hebben op een goede aansluiting aan het vraagstuk, dat tot de vergelijking $f(x) = 0$ gevoerd heeft, door zich op het ruime standpunt te stellen. Ik meen daarom, dat men goed doet bij het elementaire wiskunde-onderwijs het ruime standpunt in te nemen.

15. Verband met het graphisch oplossen van vergelijkingen. Het innemen van het ruime standpunt ten aanzien van de vergelijking $f(x) = 0$ sluit ook het beste aan bij het graphisch oplossen der vergelijking, d.w.z. het oplossen door het maken van een graphische voorstelling van de functie $f(x)$ en deze met de x-as te snijden. Doet men dit in een geval, dat rechtstreeksche substitutie van $x = a$ in $f(x)$ niet mogelijk is, en dus $f(a)$ zonder meer geen zin heeft, maar $\lim_{x=a} f(x) = 0$ is, dan krijgt men als graphische voorstelling een kromme lijn, die de x-as in het punt $x = a$ snijdt (of raakt). Daar $f(a)$ niet bestaat, moet echter juist dit snijpunt uit de kromme lijn

weggelaten worden, iets dat natuurlijk niet in een teekening tot uitdrukking gebracht kan worden.

Dit staat hiermede in verband, dat een geteekende graphische voorstelling slechts een zeer ruw beeld van de voor te stellen functie geeft, iets dat des te meer treft naarmate de functie een grilliger verloop heeft. Men kan gemakkelijk genoeg voorbeelden geven van functies, die alleen zuiver logisch te definieeren zijn en waarbij men van het maken van een graphiek geheel moet afzien.

Met zulke voorbeelden kan men natuurlijk bij het middelbaar onderwijs niet aankomen. Daar is het juist zaak de leerlingen van het groote nut van graphische voorstellingen te doordringen en hen met die voorstellingen goed vertrouwd te maken. Waar het geldt graphieken, die in de natuur- en scheikunde voorkomen en waarbij functies worden afgebeeld, waarvan de getallenwaarde slechts tot een zekeren graad van nauwkeurigheid bekend is, zijn de ontworpen graphische voorstellingen in alle opzichten voldoende om zich een beeld van het verloop der functie te vormen. Het zou m.i. weinig of geen nut hebben daartegenover te wijzen op het gebrekkige der graphische voorstellingen van vele functies, die buiten iedere toepassing op de natuurwetenschappen om wel verzonnen zijn. Dit gebrekkige toe te lichten door voorbeelden te bespreken van zich wonderlijk gedragende functies, zou toch ondoenlijk zijn en op grond daarvan lijkt het mij maar beter het vertrouwen in de juistheid van wat men aan graphische voorstellingen onmiddellijk ziet, geheel ongeschokt te laten.

Het is daarom aangewezen geen punten uit de graphische voorstelling weg te laten alleen omdat het substituteeren van de bijbehoorende waarden van x zonder meer niet mogelijk is; m.a.w. het is gewenscht de punten, die men in de teekening op de kromme ziet liggen, ook werkelijk daartoe te rekenen.

Heeft men b.v. de vergelijking

$$\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x = 0$$

op te lossen en maakt men een graphiek van het eerste lid, dan wordt dit een graphiek van tg $\frac{1}{2}x$, waarbij onmiddellijk het in den oorsprong vallende snijpunt met de x-as opvalt. Bij het enge standpunt moet men nu zeggen, dat juist dit punt niet tot de graphiek behoort.

In de theorie der functies van een reëele veranderlijke drukt men dit dan zoo uit, dat de functie $\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x$ voor $x = 0$ een ophefbare discontinuïteit heeft. Met een *ophefbare discontinuïteit* van $f(x)$ voor $x = a$ is bedoeld, dat $f(x)$ een eindige limiet L heeft, als x onbepaald tot a nadert, maar $f(a)$ een van L verschillende waarde heeft of niet bestaat, doordat $f(x)$ voor $x = a$ niet gedefinieerd is (veelal doordat bij de substitutie $x = a$ een nul in den noemer verschijnt, zooals bij $x \sin \frac{1}{x}$ voor $x = 0$). Men kan dan *de discontinuïteit opheffen* door één functiewaarde te veranderen, nl. door de waarde van $f(x)$ voor $x = a$ in L te veranderen, of door $f(a)$ alsnog te definieeren, nl. als L, dus door de aanvullende definitie $f(a) = L$.

Hierdoor bereikt men, dat de functie continu wordt voor $x = a$, waarna men allerlei andere interessante vragen kan stellen, zooals die naar de differentieerbaarheid der functie voor $x = a$. Door $f(a)$ haar oorspronkelijke waarde te laten behouden of $f(a)$ ongedefinieerd te laten, zou men voor al die andere vragen den pas afsnijden, hetgeen niet gewenscht te achtten is. Daarom is het bij een functie met een ophefbare discontinuïteit gebruikelijk *die discontinuïteit op te heffen.* Het is dan ook aangewezen hetzelfde met het eerste lid der vergelijking $f(x) = 0$ te doen, zoo $f(x)$ voor $x = a$ niet gedefinieerd is, maar $f(x)$ een limiet heeft voor $x = a$.

16. Conclusie omtrent het in te nemen standpunt. Alles samengenomen lijkt mij bij het middelbaar onderwijs het ruime standpunt het meest aangewezene en ook het leerzaamste en het meest tot de leerlingen sprekende. Het lijkt mij ook het meest in overeenstemming met het overal in de wiskunde tot uiting komende streven door invoering van nieuwe begrippen (in ons geval het interpreteeren van $f(x)$ als limiet in geval van niet gedefinieerd zijn) zooveel mogelijk uitzonderingen tot wegvallen te brengen en een onderscheiding van verschillende gevallen overbodig te maken, doordat die onderscheiding eens en vooral gemaakt is bij het afleiden van de regels, waaraan die nieuwe begrippen onderworpen zijn.

Intusschen blijft het kiezen van een weloverwogen standpunt iets individueels en bij beide standpunten is goed en nuttig werk te verrichten. Zoo de docent over voldoend kritisch vermogen beschikt, zal hij het beste doen zijn eigen standpunt te blijven innemen, als

hem dit het deugdelijkste toelijkt na het met de inzichten van anderen vergeleken te hebben en ernstig getracht te hebben zich in die andere inzichten in te denken.

Af te keuren is het echter, uit sleur in een eenmaal ingenomen standpunt te volharden. Maar evenmin is het aan te bevelen, zonder de noodige kritiek af te gaan op het oordeel van een ander, waarin men vertrouwen heeft, of op het oordeel van de meerderheid der personen, die zich over een bepaald onderwerp hebben uitgesproken. Zoo men niet zelf van de juistheid van het standpunt doordrongen is, zal men dit niet op de goede wijze tegenover zijn leerlingen kunnen innemen.

In elk geval is het noodzakelijk, dat de docent zich van het door hem ingenomen standpunt goed rekenschap geeft en dit standpunt op zijn leerlingen overdraagt, waarbij het meestal wel niet zal zijn aan te bevelen argumenten voor zijn standpunt tegenover zijn leerlingen aan te voeren. Wel noodig is echter, dat de leerlingen bij het maken van vraagstukken weten, waaraan zij toe zijn, en dat men hun een logisch in elkaar zittend geheel voorlegt, waaraan zij houvast hebben. Daardoor zal de docent bij zijn leerlingen het vermogen tot zelfstandig logisch redeneeren aankweeken en veel tot hun wetenschappelijke vorming kunnen bijdragen.

BOEKBESPREKING.

Max Greeve. (P. Hekmeyer. †) Filosofie van den meervoudigen tijd, in gemakkelijk begrijpelijken vorm. N.V. Boekh. vh. W. P. van Stockum & Zoon, 1930 (8°, 56 bldz.).

Niets zou gemakkeliker zijn, dan met werkjes als het onderhavige (dat één der vele hartstochtelike en min of meer mysties getinte „weerleggingen" van de beginselen der relativiteitstheorie inhoudt, die in de loop der laatste decennieën verschenen zijn), de spot te drijven. Immers, het tastbaar gebrek aan inzicht in de betekenis dier beginselen, gepaard aan de voorliefde voor krachttermen als „denk-corruptie", „denkfrazen", „onlogisch zinlooze idee" e.d., waarvan de schrijver blijk geeft, zou voor zodanige spotternij allicht de stof kunnen leveren. En toch ware deze, naar de mening van ondergetekende, geheel misplaatst, en dat niet alleen omdat het kruisje achter de naam des auteurs de lust tot „sotternij en spotternij" allicht doet vergaan, maar vooral ook, omdat de hartstochtelike toon waarin ontboezemingen als deze gemeenlik gesteld zijn, de natuurlike weerslag uitmaakt van de diepgaande evenwichtsverstoring in de grondslagen van ons denken, die van het veldwinnen der nieuwere opvattingen van het natuurgebeuren het noodzakelik gevolg is. Zeker, de schrijver verkeert in een vrij elementaire dwaling, wanneer hij uitvoerig betoogt (pag. 39/40) dat het (in theorie althans) toch altijd mogelik moet zijn, de gelijktijdigheid van twee gebeurtenissen op verschillende plaatsen te konstateren, en dus de „klokken" te A en te B gelijk te zetten en men krijgt al lezend de indruk, dat het toch niet moeilik zou zijn, hem met behulp van een tekeningetje of van een paar langs elkander schuivende papierstrookjes van zijn ongelijk in deze te overtuigen (àls onze uitleggingen hem nog zouden kunnen bereiken!), en al wat hij verder over de „tijdsnelheid" en de natuurlike onveranderlikheid daarvan zegt, berust eveneens op 'n misverstand en wel van een nòg meer elementair karakter: misverstand namelik omtrent de betekenis van de (natuurkundige) term „snelheid". Maar al deze misvattingen en averechtse gevolgtrekkingen nemen toch niet weg, dat er één kardinaal punt is, waarin de schrijver volmaakt gelijk heeft, en dat tegelijk de verklaring en de verontschuldiging voor zijn schijnbaar ongemotiveerde emotie uitmaakt: de absolute onverenigbaarheid namelik van de relativistiese natuurbeschouwing met de gangbare opvattingen omtrent tijd, ruimte en materie. Tot een duidelike en algemene formulering van deze onverenigbaarheid is de schrijver niet gekomen en dus heeft hij zich ook niet de vraag kunnen stellen, of die onverenigbaarheid aan de einsteinse fysika of aan de

„gangbare opvattingen" te wijten zou zijn, maar dàt een van beide op den duur het veld zal moeten ruimen, valt moeilik te betwijfelen. En wanneer wij een ogenblik onze aandacht vestigen op de grote betekenis, welke die „gangbare opvattingen" voor het gedachteleven hebben en op de innige samenhang dier opvattingen met de taalvormen, waarin dat gedachteleven zich uit, dan kunnen wij er ons niet over verbazen, dat het lekenpubliek zich allerheftigst te weer stelt, zodra het enig vermoeden begint te krijgen van de aanslag, die de moderne wetenschap op deze opvattingen dreigt te plegen. Eeuwen en eeuwen lang heeft de mensheid in de mening verkeerd, dat alle gebeurtenissen in de wereld-der-werkelikheid in rij en gelid door de eeuwigheid marcheren en het tikken van de klok die opmars op dezelfde nauwkeurige en onverbiddelike wijze beheerst als de dirigeerstok van een strenge kapelmeester de medespelers van zijn orkest, en nu leert een Einstein of een Minkowski ons plotseling, dat dat alles maar schijn is en gezichtsbedrog, dat van „rij en gelid" enkel op korte afstand zo'n beetje sprake kan zijn, maar dat het kommando: „Rechts richt u! Staat!" op een exercitieveld van astronomiese afmetingen eenvoudig geen betekenis meer heeft. Is het wonder, dat dat alles niet zonder verzet wordt aanvaard en niet zonder hartstochtelike weerzin wordt vernomen, juist door hen, die de gronden en de betekenis der nieuwere opvattingen niet of nauweliks begrepen hebben? Wij geloven van niet, en zijn dan ook van oordeel, dat nog menige „cri de coeur" als in het voor ons liggende boekje vervat is, weerklinken zal, eer de (niet in haar konsekwensies, doch in haar wezen) zo eenvoudige beginselen der relativiteitstheorie algemeen goed geworden zullen zijn.

Tot zolang zullen wij met de vele en velerlei misvattingen omtrent begrippen als gelijktijdigheid, tijdmaat, afstand of snelheid geduld dienen te oefenen.

En die misvattingen door steeds toenemende duidelikheid en aanschouwelikheid onzer formuleringen uit de weg moeten trachten te ruimen.

G. Mannoury.

INGEKOMEN BOEKEN.

D. J. SAKKERS. *Vlakke Meetkunde.*

Deel I 170 blz. 108 fig. *f* 2,25, geb. . . . . *f* 2,85
Deel II 259 blz. 142 fig. *f* 3,90, geb. . . . . *f* 4,50

Uitgave van W. J. Thieme & Cie, Zutfen 1931.

Van P. Noordhoff, Groningen.

P. WIJDENES, *Algebra voor M.U.L.O. IIB.* Examenuitgave **9e druk** . . . . *f* 2,25

Dr. P. MOLENBROEK-P. WIJDENES, *Planimetrie* voor M. en V. H. O. II. 124 blz. 120 fig. **2e druk** gec. . . . . . *f* 1,90

P. WIJDENES. *Grafiekenschrift.* **4e druk** . . . . *f* 0,50

„ *Logarithmentafels* **A 6e druk** gec. . . . . *f* 0,60

J. H SCHOGT.

BEGINSELEN DER THEORETISCHE MECHANICA.

Deel I. Kinematica, Krachtenleer, Arbeid en Arbeidsvermogen, 198 blz., ing. *f* 3.—, geb. *f* 3.50.

Deel II. Massageometrie, Dynamica, Statica, 230 blz., ing. *f* 3.75, geb. *f* 4.25.

Er is veel zorg besteed aan de ontwikkeling van de kinematische en dynamische grondbegrippen. De mechanica is gescheiden gehouden van wiskundige hulpwetenschappen (eerste beginselen der differentiaal- en integraalrekening, vectorentheorie, theorie van het zwaartepunt) om duidelijk te doen uitkomen, welke begrippen van wiskundige en welke van mechanische aard zijn.

Dr. B. P. HAALMEYER.

LEERBOEK DER VLAKKE MEETKUNDE

voor H.B.S. 5 j. c., Gymnasium, Lyceum, [illegible].

I, 152 blz., 125 fig., geb. *f* 2.25.
II, 133 blz., 160 fig., geb. *f* 2.25.

Behalve de gewone schoolstof voor het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs heeft de schrijver opgenomen een hoofdstukje over sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek en een slothoofdstuk (XXI in deel II) over ellips, hyperbool en parabool.

Een uiterst zorgvuldig bewerkt schoolboek, waarin rekening gehouden is met de ontwikkeling der schooljeugd; de strengheid niet ten top gedreven, maar de moeilijkheden ook niet verdoezeld; de theorie zuiver en begrijpelijk, de meetkunde niet verlaagd tot het uit den treure sommetjes-maken.

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES.

VLAKKE DRIEHOEKSMETING

voor Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs, 125 blz., 30 fig., geb., met formules, *f* 2.—. Antw. *f* 0.60.

Algemeene begrippen. — Betrekkingen tusschen de gon. verh. van verschillende hoeken. — Het oplossen van gon. verg. — Cyclometrische vormen. — Oplossen van rechth. en scheefh. driehoeken. — Oppervlakken. — Merkwaardige lijnen. — Toegepaste driehoeksmeting. — Toepassingen op de Stereometrie. — Vraagstukken.

In dit boek is sterk rekening gehouden met de wenschen van L.I.W.E.N.A.G.E.L., n.l. het gebruik van tafels met de directe waarden der goniometrische functies; de behandeling van opgaven, waarin de trigonometrie wordt toegepast op de stereometrie.

De eenige tafels, die hierbij kunnen dienen, zijn Gonggrijp Tafel D en Versluys Tafel H, de beste, die in ons land bestaan.
